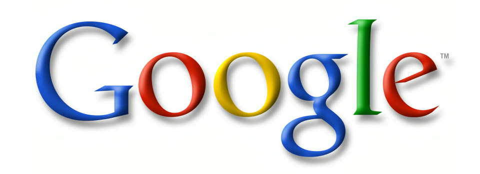




Beitrag zur synthetischen Geometrie

ebener Kreissysteme

und damit im Zusammenhange stehender

höherer Kurven:

I. und II.

Die perspektiv. Kreisverwandtschaft mit Einschluss der Aehnlichkeit,

III.

Die Cartesischen Ovale und ihre konfokalen Büschel

mit besonderer Berücksichtigung der dabei auftretenden

Konfigurationen und **involutorischen Gebilde**

von

Johannes Finsterbusch,

Oberlehrer an der Realschule zu Werdau.

~~1888. Programm No. 548.~~ 1890. Programm No. 570.

1892. Programm No. 578,

ausgegeben 1893 mit Progr. No. 579.

Julius Booch, Werdau.

Vorwort.

Von den drei Programm-Abhandlungen bilden ein Ganzes:

1888.	Programm	No. 548,	Seite	1—40,
1890.	„	„ 570,	„	41—76,
1892.	„	„ 578,	„	77—122.

Sie umfassen als

I. Abschnitt

1. **Die perspektivische Aehnlichkeit von n Systemen** S. 1—24,
2. **Die perspektivische Inversion mit besonderer Berücksichtigung der selbstinversen Kurven** S. 25—78,
3. **Die Cartesischen Ovale und ihre konfokalen Büschel** S. 78—120.

Der folgende II. Abschnitt wird **die Kreisverwandtschaft mit Einschluss der Aehnlichkeit in allgemeiner Lage** behandeln.

Werdau, im März 1893.

Johannes Finsterbusch.

Beitrag zur synthetischen Geometrie

ebener Kreissysteme

und damit im Zusammenhange stehender

höherer Kurven.

I. Abschnitt.

Die Kreisverwandtschaft in perspektivischer Lage.

> Gloriatur Geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa praestat.
>
> J. Newton, Phil. nat. princ. math.

I. Aehnlichkeit. II. Inversion.

von

Johannes Finsterbusch,

Oberlehrer an der Realschule zu Werdau.

1888. Programm No. 548.

Vorbemerkung.

Da der Raum einer Programmarbeit beschränkt ist, so konnte nur ein Fünftel der angekündigten Abhandlung vorläufig zum Druck gelangen. Die übrigen Abschnitte sollen folgen. Der vorliegende erste Abschnitt giebt (in zum grössten Teile elementarer Weise) die ebene Kreisverwandtschaft im weiteren Sinne und enthält I. die perspektivische Aehnlichkeit von zwei und mehreren Systemen und II. die perspektivische Inversion. In letzterem Kapitel sind die Kreisbüschel etc. — überhaupt alle speciellen inversen Beziehungen von Kreisen zu einem vorgelegten System von zwei oder mehreren Kreisen, soweit sie nicht für die allgemeine Theorie der Inversion von Bedeutung sind, fortgelassen und einem besonderen Kapitel zugewiesen worden, da sie allein 50—60 Seiten beansprucht hätten. Desgleichen sind auch verschiedene allgemeine inverse Beziehungen, z. B. die der Fusspunktkurven und reciproken Polaren, sowie eine ausführliche Theorie der perspektivisch selbstinversen Kurven (siehe § 36) einem späteren Kapitel vorbehalten worden.

I. Abschnitt.

Die Kreisverwandtschaft in perspektivischer Lage.

I.

Die Aehnlichkeit in perspektivischer Lage.

§ 1. Zwei Systeme Σ_1 und Σ_2 sind nach dem Prinzipe der Aehnlichkeit perspektivisch auf einander bezogen, wenn jedem Punkte P_1 des einen ein Punkt P_2 des andern zugeordnet ist, welcher mit ihm und einem festen Punkte A in einer Geraden liegt und zwar so, dass das Verhältnis μ_{12} der Entfernungen beider Punkte von dem festen Punkte konstant ist.*) Je zwei einander zugeordnete Punkte P_1 und P_2 werden ähnlich liegend oder perspektivisch ähnlich genannt. Der feste Punkt A heisst Aehnlichkeitspunkt oder Aehnlichkeitscentrum und das konstante Entfernungsverhältnis μ_{12} Aehnlichkeitsverhältnis. Die beiden Indices sollen andeuten, dass $\mu_{12} = \frac{AP_1}{AP_2}$ und dem analog $\mu_{21} = \frac{AP_2}{AP_1}$ ist, so dass also stets die Beziehung besteht $\mu_{12} \cdot \mu_{21} = 1$. Je nachdem nun μ_{12} positiv oder negativ ist, sind die Strecken AP_1 und AP_2 gleich- oder entgegengesetzt gerichtet, und es sind daher zwei Arten perspektivisch ähnlicher Punkte zu unterscheiden, deren Definitionen lauten:

*) J. Steiner, die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises 1833, § 11 oder Ges. W. Bd. I pag. 482.

*In Bezug auf ein Aehnlichkeitscentrum A vom positiven Aehnlichkeitsverhältnis $\mu_{12} = +\mu$ sind je zwei Punkte P_1 und P_2 positiv oder äusserlich perspektiv. ähnlich, welche von A aus nach einer und derselben Richtung, (also mit A in einer Geraden) liegen und deren Entfernungsverhältnis $AP_1 : AP_2$ konstant und zwar gleich dem Aehnlichkeitsverhältnisse μ_{12} ist.**)

*In Bezug auf ein Aehnlichkeitscentrum A vom negativen Aehnlichkeitsverhältnis $\mu_{12} = -\mu$ sind je zwei Punkte P_1 und P_2 negativ oder innerlich perspektiv. ähnlich, welche von A aus nach entgegengesetzten Richtungen, (also mit A in einer Geraden) liegen und deren Entfernungsverhältnis $AP_1 : AP_2$ konstant und zwar gleich dem Aehnlichkeitsverhältnisse μ_{12} ist.**)

Die Konstruktion perspektiv. ähnlicher Systeme bedarf ihrer Einfachheit wegen keiner Erläuterung. Mit Hilfe des Pantographen oder Storchschnabels**) lässt sich auf mechanische Weise zu einer Figur die in Bezug auf einen beliebigen Aehnlichkeitspunkt von vorgeschriebenem Aehnlichkeitsverhältnisse perspektivisch ähnliche Figur ermitteln.

§ 2. Jedem Punkte P_1 in Σ_1 entspricht im allgemeinen ein nicht mit ihm zusammenfallender Punkt P_2 in Σ_2; es giebt aber auch sich selbst entsprechende Elemente (Punkte, Gerade, Kurven) d. h. solche, die mit ihren perspektivisch ähnlichen sich decken; dieselben sollen perspektivisch selbstähnlich genannt werden.

Der Aehnlichkeitspunkt und die unendlich fernen Punkte sind perspektivisch selbstähnlich. Jede durch den Aehnlichkeitspunkt gehende Gerade als solche ist perspektivisch selbstähnlich und wird daher Aehnlichkeitslinie genannt.

Jeder Strahl derselben ist positiv selbstähnlich, und die Bewegung zweier entsprechender Punkte geschieht nach einer und derselben Richtung.

Jedem Strahl derselben ist der entgegengesetzt gerichtete negativ ähnlich, und die Bewegung zweier entsprechender Punkte geschieht nach entgegengesetzten Richtungen.

*) Da die Ausdrücke *positiv perspektivisch ähnlich* und *negativ perspektivisch ähnlich* oft wiederkehren, so sollen dieselben durch die einfacheren *positiv ähnlich* und *negativ ähnlich* ersetzt werden.

**) C. M. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, II. Teil, § 124.
L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, I. Teil, pag. 560.

Auf jeder Aehnlichkeitslinie bewegen sich also zwei perspektivisch ähnliche Punkte gleichzeitig nach dem Aehnlichkeitscentrum hin oder von ihm ab.

Jeder Punkt R der Ebene besitzt zwei perspektivisch ähnliche Punkte P_2 und Q_1, da er sowohl als ein Punkt P_1 des einen Systems Σ_1, als auch als ein Punkt Q_2 des anderen Systems Σ_2 betrachtet werden kann.

Wird nun P_2 als zu Σ_1 gehörig betrachtet, so ist demselben ein neuer Punkt P_3 in Σ_2 perspektivisch ähnlich, und wird analog Q_1 als zu Σ_2 gehörig angesehen, so entspricht demselben ein neuer Punkt Q_2 in Σ_1. Wird dieses Verfahren nach beiden Seiten fortgesetzt, so nähern sich die Punkte P immer mehr dem Aehnlichkeitspunkte A und die Punkte Q dem ∞ fernen Punkt der Aehnlichkeitslinie. Es resultiert auf diese Weise eine selbstähnliche Punktreihe, welche durch Uebereinanderschreiben der in Σ_1 und Σ_2 sich entsprechenden Punkte wie folgt übersichtlich dargestellt werden kann:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_1(\infty \; . \; . \; . \; . \; Q_2\, Q_1\, R\, P_2\, P_3\, P_4 \; . \; . \; . \; A) \\ \Sigma_2(\infty \; . \; . \; . \; Q_2\, Q_1\;\, R\;\, P_2\, P_3\, P_4 \; . \; . \; . \; . \; A) \end{array}\right\} \backsim A;\; \mu_{12}.$$

Eine selbstähnliche Punktreihe ist daher durch das Aehnlichkeitsverhältnis μ_{12} und die Angabe der Entfernung c eines (beliebigen) Punktes vom Aehnlichkeitspunkt bestimmt; und die Entfernungen r aller übrigen Punkte sind durch die Gleichung

$$r = c \cdot \mu_{12}{}^m$$

gegeben, in welcher m jede positive oder negative ganze Zahl bedeuten kann.

Ist μ_{12} negativ, so befinden sich je zwei entsprechende Punkte auf verschiedenen Seiten von A. Die negativ selbstähnliche Punktreihe zerfällt also in zwei positiv selbstähnliche Punktreihen vom Aehnlichkeitsverhältnis $\mu_{12}{}^2$

$r = c.(\mu_{12}{}^2)^m$; $r = c\, \mu_{12} . (\mu_{12}{}^2)^m$

Sollen sich in der selbstähnlichen Punktreihe nicht die aufeinanderfolgenden Punkte, sondern die n ten Punkte entsprechen, so können die Entfernungen von n Punkten willkürlich festgesetzt werden, und die Reihe zerfällt in n von einander unabhängige selbst-

ähnliche Partialreihen. In jeder derselben entsprechen sich dann wie oben die aufeinander folgenden Punkte. Es ist leicht einzusehen, dass zwischen je zwei Punkte einer solchen Partialreihe nur e i n Punkt einer jeden andern fällt und fallen muss, und dass zwischen je zwei Punkten einer Partialreihe die Anordnung der Punkte der übrigen $n - 1$ Reihen periodisch wiederkehrt.

§ 3. *Jeder Geraden ist eine parallele Gerade perspektivisch ähnlich.*

Einem Strahlenbüschel ist das durch den perspektivisch ähnlichen Punkt bestimmte gleichwendig | kongruente perspektivisch ähnlich, und es sind gleichgerichtete Strahlen positiv ähnlich. | und es sind gegengerichtete Strahlen negativ ähnlich.

Je zwei Strahlen des einen Systems schliessen denselben Winkel ein, wie die perspektivisch ähnlichen im andern System.

Je zwei perspektivisch ähnliche Strecken stehen im Aehnlichkeitsverhältnis μ_{12} und je zwei Strecken des einen Systems stehen in demselben Verhältnis wie die perspektivisch ähnlichen des anderen Systems. Hieraus folgt daher:

Perspektivisch ähnliche Gebilde sind gleichwendig ähnlich.

§ 4. Jeder centrischen Kurve (z. B. Ellipse, Kreis) ist wieder eine ähnliche centrische Kurve perspektivisch ähnlich, und zwar sind die Mittelpunkte und je zwei parallele Durchmesser beider perspektivisch ähnlich.

Die zu einer endlichen geschlossenen Kurve (z. B. Ellipse) perspektivisch ähnliche kann alle möglichen Lagen zu derselben einnehmen, sie also aus- oder einschliessen, äusserlich oder innerlich berühren oder unter beliebigen Winkeln schneiden. *Eine durch das Aehnlichkeitscentrum gehende Kurve wird von ihrer perspektivisch ähnlichen im Aehnlichkeitspunkte berührt. Beschreibt ein Punkt eine endliche geschlossene Kurve, so durchläuft der perspektivisch ähnliche Punkt die entsprechende Kurve in d e m s e l b e n Sinne, gleichviel ob der Aehnlichkeitspunkt ausserhalb, auf oder innerhalb der Kurven liegt.*

Je zwei perspektivisch ähnliche Polygone oder Kurven werden von den Aehnlichkeitslinien unter resp. gleichen Winkeln geschnitten, und je zwei Polygone oder Kurven schneiden sich unter denselben Winkeln, wie ihre perspektivisch ähnlichen. Ferner sind von perspektivisch ähnlichen Kurven die ausgezeichneten Punkte und Linien als Wendepunkte, Wendetangenten, Spitzen, Axen etc., sowie

die zu perspektivisch ähnlichen Punkten gehörigen Tangenten, Normalen, Krümmungskreise, Krümmungsmittelpunkte etc. perspektivisch ähnlich.

§ 5. *Alle Kreise sind einander ähnlich; dasselbe gilt von allen Kurven mit nur einem Parameter.* Einige Beispiele von solchen Kurven sind: Parabel, gleichseitige Hyperbel, Cardioide, Schleifenlemniskate.

Eine besondere Beachtung verdienen die isogonalen Trajektorien des Strahlenbüschels, die logarithmischen Spiralen, denn alle gleichwinkligen sind kongruent und zugleich ähnlich in Bezug auf jedes Aehnlichkeitsverhältnis.

Bezeichnen r, φ die Polarkoordinaten und β den konstanten Winkel der log. Spirale mit den Radienvektoren, so ist bekanntlich die Differentialgleichung derselben

$$dr = r. \cot \beta. \, d\varphi.$$

Durch Integration erhält man, wenn r für $\varphi = o^0$ mit c bezeichnet wird, und e die Basis der natürlichen Logarithmenbedeutet,

$$r = c. \, e^{\varphi \cot \beta} \qquad \text{oder} \qquad \text{lognat} \frac{r}{c} = \varphi \cot \beta$$

Ist $\beta < \frac{\pi}{2}$, so wachsen r und φ gleichzeitig; ist $\beta > \frac{\pi}{2}$, so wächst r, wenn φ abnimmt und umgekehrt.

Jeder logarithmischen Spirale S'_β ist eine gleichwendig kongruente, jedoch um einen Winkel ε gedrehte Spirale S''_β perspektivisch ähnlich und ihre asymptotischen Punkte sind entsprechende Punkte.

Für positiv ähnliche Spiralen vom Aehnlichkeitsverhältnisse $\mu_{12} = +\mu$ ergiebt sich: $\varepsilon = tg\,\beta.$ lognat μ_{12}.	Für negativ ähnliche Spiralen vom Aehnlichkeitsverhältnisse $\mu_{12} = -\mu$ ergiebt sich: $\varepsilon = \pi + tg\,\beta.$ lognat $(-\mu_{12})$.

Umgekehrt sind zwei um den Winkel ε gedrehte Spiralen perspektivisch ähnlich in Bezug auf die Aehnlichkeitsverhältnisse:

$\mu_{12} = e^{[\varepsilon + 2n\,\pi] \cot \beta.}$	$\mu_{12} = -\,e^{[\varepsilon + (2n-1)\,\pi] \cot \beta.}$

Da n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann, so sind also zwei logarithmische Spiralen S'_β nnd S''_β in Bezug auf unzählige Aehnlichkeitsverhältnisse perspektivisch ähnlich.

§ 6. Sind die beiden perspektivisch ähnlichen logarithm. Spiralen koncentrisch, fallen also ihre asymptotischen Punkte mit dem Aehnlichkeitspunkt zusammen, so können beide Spiralen, da sie gleich-

wendig kongruent sind, zur Deckung gelangen. Es resultiert dann eine perspektivisch selbstähnliche logarithmische Spirale. Dies tritt ein, wenn ε den Werth 2π oder eines Vielfachen von 2π annimmt, und es werde der konstante Winkel β in diesem Falle mit α bezeichnet.

In Bezug auf das Aehnlichkeitsverhältnis $\mu_{12} = +\mu$ ist eine logarithm. Spirale S_α positiv selbstähnlich, wenn

$$\cot\alpha = \frac{1}{2n\pi}.\ \text{lognat}\ \mu_{12}$$

In Bezug auf das Aehnlichkeitsverhältnis $\mu_{12} = -\mu$ ist eine logarithm. Spirale S_α negativ selbstähnlich, wenn

$$\cot\alpha = \frac{1}{(2n-1)\pi}.\ \text{lognat}(-\mu_{12})$$

Da hier wieder n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann, so können in Bezug auf ein Aehnlichkeitsverhältnis μ_{12} logarithm. Spiralen von unzählig verschiedenen Winkeln α selbstähnlich sein.

Umgekehrt ist eine jede logarithmische Spirale S_α perspektivisch selbstähnlich in Bezug auf die Aehnlichkeitsverhältnisse

$$\mu_{12} = e^{2n\pi.\ \cot\alpha} \qquad\qquad \mu_{12} = -e^{(2n-1)\pi.\ \cot\alpha}$$

Wird der für ein vorgeschriebenes Aehnlichkeitsverhältnis μ_{12} erhaltene Wert von $\cot\alpha$ in obige Gleichung der logarithmischen Spirale eingesetzt, so ergiebt sich

$$r = c\ .\ \mu_{12}^{\frac{\varphi}{2n\pi}}$$

als *Gleichung der positiv selbstähnlichen logar. Spirale* und zwar entsprechen sich die Punkte derselben nach n Windungen.

$$r = c\ .\ (-\mu_{12})^{\frac{\varphi}{(2n-1)\pi}}$$

als *Gleichung der negativ selbstähnlichen logar. Spirale* und zwar entsprechen sich die Punkte nach $n - \frac{1}{2}$ Windungen.

§ 7. Ausser den logar. Spiralen können noch unzählig viel andre Kurven perspektivisch selbstähnlich sein. *Bezeichnet $C = f(\varphi)$ eine periodische Funktion vom Modul $\varphi = k\ .\ 2\pi$, so wird die Gleichung*

$$r = f(\varphi)\ .\ \mu_{12}^{\frac{\varphi}{2n\pi}}$$

eine positiv selbstähnliche Kurve darstellen, deren korrespondierende Punkte sich nach n Windungen entsprechen, vorausgesetzt, dass

$$r = f(\varphi)\ .\ (-\mu_{12})^{\frac{\varphi}{(2n-1)\pi}}$$

eine negativ selbstähnliche Kurve darstellen, deren korrespondierende Punkte sich nach $n - \frac{1}{2}$ Windun-

mod. $\varphi = k \,.\, 2\pi$ *ein aliquoter Teil von* $n \,.\, 2\pi$ *ist, also* $\frac{n}{k}$ *eine ganze Zahl ergiebt.* Hiernach muss $k < n$ sein. Es kann k sowohl eine ganze Zahl, als auch ein Bruch sein, dessen Zähler in n ohne Rest enthalten ist.

gen entsprechen, vorausgesetzt, dass mod. $\varphi = k \,.\, 2\pi$ *ein aliquoter Teil von* $(2n - 1)\pi$ *ist, also* $\frac{2n-1}{2k}$ *eine ganze Zahl ergiebt.* Hiernach muss $2k < 2n - 1$ sein. Es muss k stets ein Bruch sein, dessen Zähler in $2n - 1$ ohne Rest enthalten ist und dessen Nenner ein Vielfaches von 2 ist.

Noch allgemeiner lässt sich der Satz aufstellen:

Vorausgesetzt, dass $f(\varphi)$ *den vorstehenden Anforderungen genügt, lässt sich eine jede perspektivisch selbstähnliche Kurve durch eine Gleichung von der Form:*

$$\text{(I.)}\quad r - f(\varphi) \,.\, \mu_{12}^{\frac{\varphi}{2n\pi}} = o \qquad\qquad r - f(\varphi) \,.\, (-\mu_{12})^{\frac{\varphi}{(2n-1)\pi}} = o$$

oder

$$\text{(II.)}\quad r - f(\varphi) \,.\, \mu_{12}^{\frac{-\varphi}{2n\pi}} = o \qquad\qquad r - f(\varphi) \,.\, (-\mu_{12})^{\frac{-\varphi}{(2n-1)\pi}} = o$$

*oder durch ein Produkt von mehreren Gleichungen von der Form I. und II. darstellen.**)

Die Kurve $C = f(\varphi)$ heisse die Charakteristik der perspektivisch selbstähnlichen Kurve. Für die logarithmische Spirale z. B. ist die Charakteristik ein um den Aehnlichkeitspunkt als Mittelpunkt beschriebener Kreis $C = c$.

Ein jeder Radiusvektor wird von allen Windungen einer perspektivisch selbstähnlichen Kurve unter einem und demselben, oder periodisch wiederkehrend unter mehreren Winkeln geschnitten, je nachdem $C = f(\varphi)$ eindeutig oder mehrdeutig ist. Es soll dieser Winkel aus der Gleichung der perspektivisch selbstähnlichen Kurve hergeleitet werden. Als Differentialgleichung derselben ergiebt sich

$$\frac{dr}{r\,d\varphi} = \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} + \frac{1}{2n\pi}\,\text{lognat}\,\mu_{12} \qquad\Bigg|\qquad \frac{dr}{rd\varphi} = \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} + \frac{1}{(2n-1)\pi}\,\text{lognat}(-\mu_{12})$$

Bezeichnet nun ϱ den variablen Winkel, welchen die perspektivisch selbstähnliche Kurve, γ den variablen Winkel, welchen die Cha-

---

*) Ein hierher gehöriges Beispiel wird später gegeben.

rakteristik, und α wie oben den konstanten Winkel, welchen die logarithmische Spirale, deren Punkte nach

n Windungen	$n - \frac{1}{2}$ Windungen

perspektivisch ähnlich sind, mit dem Radiusvektor bildet, so gelten die Differentialgleichungen

$$\frac{dr}{r\,d\varphi} = \cot \varrho \qquad \text{und} \qquad \frac{dC}{C\,d\varphi} = \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} = \cot \alpha$$

und nach dem früheren ist

$\frac{1}{2n\pi} \operatorname{lognat} \mu_{12} = \cot \alpha$	$\frac{1}{(2n-1)\pi} \operatorname{lognat} (-\mu_{12}) = \cot \alpha$

Durch Einsetzen dieser Werte geht obige Differentialgleichung über in die gesuchte Gleichung

$$\cot \varrho = \cot \gamma + \cot \alpha$$

§ 8. Gleichwendig ähnliche Gebilde können stets perspektivisch ähnlich gemacht werden dadurch, dass die eine Figur um irgend einen Punkt so weit gedreht wird, bis ein beliebiges Paar entsprechender Seiten und folglich alle einander parallel werden. Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von zwei Paaren sich entsprechender Punkte ist dann das Aehnlichkeitscentrum, denn es müssen auch alle anderen, je zwei entsprechende Punkte verbindenden Geraden in diesem Punkte sich schneiden.

Während aus dem Parallelismus entsprechender Strecken folgt, dass alle Verbindungsgeraden je zweier sich entsprechender Punkte durch einen Punkt, den Aehnlichkeitspunkt laufen, ist es umgekehrt nicht unbedingt notwendig, dass zwei ähnliche Figuren auch dann schon perspektivisch ähnlich sind (dass also entsprechende Geraden parallel laufen), wenn sie perspektivisch sind, d. h. wenn alle Verbindungsgeraden je zweier sich entsprechender Punkte durch einen und denselben Punkt gehen. Z. B. brauchen, wenn obiges der Fall, zwei ähnliche Polygone, welche Kreisen eingeschrieben sind, durchaus nicht perspektivisch ähnlich zu sein, wenn sie perspektivisch sind, denn es gilt der Satz:

*Werden durch einen Schnittpunkt zweier Kreise beliebige Gerade gezogen, so sind die beiden Polygone, welche die anderen Schnittpunkte zu Ecken haben, ähnlich.**)

---

*) Th. Reye, Synthet. Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. 1879, pag. 16, art. 58.

Es ist also der Ausdruck perspektivisch ähnlich (oder ähnlich liegend) von dem Ausdruck perspektivisch und ähnlich wohl zu unterscheiden.

Zwei ähnliche Figuren sind im allgemeinen nicht perspektivisch ähnlich. Einige der Gebilde, welche eo ipso perspektivisch ähnliche Lage haben, sind: zwei Punkte, zwei parallele Gerade (Strahlen oder Strecken), vier Punkte einer Geraden, vier parallele Gerade (nicht Strecken), zwei Kreise, zwei gleichwinklige logarithmische Spiralen.

§ 9. Es erübrigt noch eine Bemerkung über zwei perspektivisch ähnliche Systeme vom Aehnlichkeitsverhältnis $\mu_{12} = \pm 1$. In diesem Specialfall werden die Systeme (gleichwendig) kongruent.

Ist $\mu_{12} = +1$ und liegt der Aehnlichkeitspunkt im Endlichen, so decken sich die beiden kongruenten Systeme; ist der Aehnlichkeitspunkt unendlich fern, so können die beiden Systeme auch parallel verschoben sein. Die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte sind dann gleich und parallel.

Ist $\mu_{12} = -1$, so haben die beiden kongruenten Systeme diametrale Lage in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt; beide Systeme zusammen bilden ein centrisches System, und das Entsprechen der Punkte ist ein involutorisches. Jedes centrische Gebilde kann daher als ein negativ selbstähnliches vom Aehnlichkeitsverhältnis $\mu_{12} = -1$ angesehen werden.*)

§ 10. Es giebt verschiedene ähnliche Gebilde, welche — in Bezug auf einen Punkt der Ebene perspektivisch ähnlich gemacht — ausser diesem Punkt noch einen anderen besitzen, in Bezug auf welchen sie in jener Lage ebenfalls perspektivisch ähnlich sind und zwar negativ, wenn sie in Bezug auf den ersten positiv perspektivisch ähnlich sind und umgekehrt, sodass diese Gebilde nie zwei positive oder negative Aehnlichkeitspunkte, sondern stets einen positiven und einen negativen haben. Derartige Gebilde sind z. B. zwei begrenzte Gerade (Strecken), zwei ähnliche Parallelogramme, zwei Kreise. Ueberhaupt gilt, wie leicht nachzuweisen, der Satz:

Je zwei ähnliche centrische Systeme besitzen, in parallele Lage gebracht, zwei Aehnlichkeitspunkte, deren Aehnlichkeitsverhältnisse entgegengesetzt gleich sind.

*) Ein Gebilde ist centrisch, wenn es einen Mittelpunkt hat von der Beschaffenheit, dass jede durch denselben gelegte Gerade das Gebilde in einer geraden Anzahl von Punkten schneidet, die paarweise von dem Mittelpunkte gleiche Entfernung haben.

Zwischen dem positiven und negativen Aehnlichkeitspunkt A' und A'' und den Mittelpunkten M_1 und M_2 zweier centrischen Gebilde findet also die Beziehung statt: 2

$$\mu_{12} : 1 = A' M_1 : A' M_2 = A'' M_1 : (- A'' M_2)$$

und es sind daher die vier Punkte M_1 A'' M_2 A' harmonisch. *Die Mittelpunkte zweier perspektivisch ähnlicher centrischen Systeme sind durch die Aehnlichkeitspunkte harmonisch getrennt und umgekehrt.*

Wird ein Gebilde als dem einen von zwei perspektivisch ähnlichen centrischen Systemen zugehörig betrachtet, so entsprechen demselben in Bezug auf die beiden Aehnlichkeitspunkte der Systeme zwei kongruente Gebilde, welche den Mittelpunkt des andern Systems zum Aehnlichkeitspunkt vom Aehnlichkeitsverhältnis —1 besitzen. 3

§ 11. *Ist von drei ähnlichen Systemen Σ_1, Σ_2 und Σ_3 sowohl Σ_1 als auch Σ_2 perspektivisch ähnlich Σ_3, so sind auch Σ_1 und Σ_2 perspektivisch ähnlich, und zwar sind entweder alle drei Systempaare positiv ähnlich, oder nur ein Paar ist positiv ähnlich und die beiden andern negativ ähnlich.* Für die drei Aehnlichkeitsverhältnisse gilt daher stets die Gleichung 1

$$\mu_{12} \cdot \mu_{23} \cdot \mu_{31} = +1$$

Da die Verbindungsgerade der beiden Aehnlichkeitspunkte A_{13} und A_{23}, als zu Σ_3 gehörig, auch Σ_1 zukommt, weil sie durch A_{13} geht, und auch Σ_2 angehört, weil sie durch A_{23} geht, so muss sie als perspektivisch selbstähnliche Gerade von Σ_1 und Σ_2 auch durch A_{12} gehen, und es folgt daher: *Die drei Aehnlichkeitspunkte dreier perspektivisch ähnlichen Systeme liegen in einer Geraden,* welche äussere oder innere Aehnlichkeitsaxe derselben genannt wird, je nachdem alle drei Aehnlichkeitsverhältnisse positiv sind oder nicht.*) 2

Die Aehnlichkeitsaxe schneidet je drei entsprechende Gebilde der drei p. ä. Systeme gleichwinklig.

Je zwei p. ä. Punktgruppen der drei p. ä. Systeme sind affin, und die Aehnlichkeitsaxe ist die Affinitätsaxe.

Decken sich zwei der drei Aehnlichkeitspunkte, so fällt auch der dritte mit ihnen zusammen. 3

Vorstehender Satz lässt verschiedene Anwendungen zu; so ergiebt sich z. B. unter Berücksichtigung von § 4,2 für drei ähn- 4

*) Da die Aehnlichkeitsverhältnisse der drei Aehnlichkeitspunkte obiger Gleichung genügen, so folgt dieser Satz auch nach dem bekannten Satze von Menelaus in Bezug auf jedes Dreieck einer p. ä. Punktgruppe.

liche Kegelschnitte als die p. ä. Systeme: Werden von drei perspektivisch ähnlichen Kegelschnitten zwei von dem dritten berührt, so geht die Verbindungsgerade der Berührungspunkte durch einen Aehnlichkeitspunkt der ersteren, und zwar durch den äusseren bei gleichartiger, durch den inneren bei ungleichartiger Berührung.

1 § 12. Sind die drei perspektivisch ähnlichen Systeme centrisch, so haben sie nach dem Obigen drei äussere und drei innere Aehnlichkeitspunkte, und es folgt aus vorstehenden Sätzen:

Die sechs Aehnlichkeitspunkte dreier perspektivisch ähnlichen centrischen Systeme liegen zu dreien in vier Geraden, der äusseren Aehnlichkeitsaxe und drei inneren, und zwar bestimmen die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte die äussere, und je ein äusserer mit den beiden ihm nicht zugehörigen inneren Aehnlichkeitspunkten eine innere Aehnlichkeitsaxe. Werden die äusseren Aehnlichkeitspunkte mit A und die inneren mit J bezeichnet, so sind

$$A_{12}\ A_{23}\ A_{31}\ ,\ A_{12}\ J_{23}\ J_{31}\ ,\ J_{12}\ A_{23}\ J_{31}\ ,\ J_{12}\ J_{23}\ A_{31}$$

die vier Aehnlichkeitsaxen.

Jede der Aehnlichkeitsaxen schneidet je drei entsprechende Gebilde der drei p. ä. centrischen Systeme gleichwinklig.

Liegen die Mittelpunkte der drei p. ä. centrischen Systeme in einer Geraden, so fallen mit derselben alle vier Aehnlichkeitsaxen zusammen.

2 Da die sechs Aehnlichkeitspunkte die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits sind, so folgt nach einem bekannten Satze: *Die Halbierungspunkte der drei Strecken, welche je zwei zusammengehörige Aehnlichkeitspunkte verbinden, liegen in einer Geraden,* welche Aehnlichkeitscentrale genannt werden soll.

3 Da für die drei inneren Aehnlichkeitspunkte, oder für je einen inneren und die beiden von ihm unabhängigen äusseren die zugehörigen Aehnlichkeitsverhältnisse der Gleichung $\mu_{12}\ \mu_{23}\ \mu_{31} = -1$ genügen, so folgt nach dem bekannten Satze von Ceva in Bezug auf das Mittelpunktsdreieck der drei p. ä. centrischen Systeme: *Die Verbindungslinien der Mittelpunkte dreier perspektivisch ähnlichen centrischen Systeme mit den von ihnen unabhängigen Aehnlichkeitspunkten derselben schneiden sich zu dreien in vier Punkten,* oder sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks, und es

bilden daher je zwei dieser Punkte mit einem Mittelpunkte und einem Aehnlichkeitspunkte eine harmonische Gruppe.*)

Es gehen also die Geraden $M_1 J_{23}$, $M_2 J_{31}$, $M_3 J_{12}$, ferner $M_1 A_{23}$, $M_2 A_{31}$, $M_3 J_{12}$, ebenso $M_1 A_{23}$, $M_2 J_{31}$, $M_3 A_{12}$ und $M_1 J_{23}$, $M_2 A_{31}$, $M_3 A_{12}$ durch je einen Punkt O_{123} , $O_{12,3}$, $O_{13,2}$ und $O_{23,1}$.

§ 13.**) Vier perspektivisch ähnliche Systeme geben paarweise sechs Aehnlichkeitspunkten den Ursprung, welche zu je drei in vier Aehnlichkeitsaxen liegen, von denen je zwei durch einen Aehnlichkeitspunkt gehen. Sind von einer jeden Gruppe von vier p. ä. Strahlen bezüglich

4 gleich-, 3 gleich- u. 1 gegen-, 2 gleich- u. 2 gegen-gerichtet, so besitzen die vier p. ä. Systeme an äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkten bezüglich

$6\ A$ $\qquad$ $3\ A$ und $3\ J$ $\qquad$ $2\ A$ und $4\ J$

und an äusseren und inneren Aehnlichkeitsaxen bezüglich

$4\ a.$ $\qquad$ $1\ a$ und $3\ i.$ $\qquad$ $4\ i.$

Fallen die vier Aehnlichkeitsaxen von vier p. ä. Systemen in eine allen vier gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe (g) zusammen, so werden von derselben je vier p. ä. Gebilde der Systeme in den entsprechenden Punkten gleichwinklig geschnitten.

Je zwei p. ä. Punktgruppen von vier p. ä. Systemen mit gemeinschaftlicher Aehnlichkeitsaxe sind affin.

Liegen vier Aehnlichkeitspunkte in einer Geraden, so haben, da auch die übrigen zwei, also alle sechs auf dieselbe fallen, die vier p. ä. Systeme eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe:

$$g = g_{1234} \qquad g' = g_{123,4} \qquad g'' = g_{12,34}$$

Liegen drei p. ä. Punkte von vier p. ä. Systemen in einer Geraden, so haben dieselben, falls keine Aehnlichkeitspunkte sich decken, nur dann eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe, wenn auch der vierte, mithin alle vier p. ä. Punkte in der Geraden liegen, und diese ist dann die gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe.

---

*) J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie I. § 3.
W. Fiedler, Cyklographie, 1882, pag. 15.

**) In den folgenden Paragraphen ist der Kürze wegen die Begründung der Sätze und die elementare Herleitung der metrischen Relationen grösstenteils weggelassen oder nur angedeutet worden.

3 *Fällt der Aehnlichkeitspunkt zweier von vier p. ä. Systemen mit dem der beiden andern zusammen, so haben die vier Systeme eine durch diesen zweifachen Aehnlichkeitspunkt gehende gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe.* Vergleiche § 14,4.

4 *Decken sich drei Aehnlichkeitspunkte von vier p. ä. Systemen, so haben dieselben eine durch den dreifachen Punkt gehende gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe.* Vergleiche § 14,5.

5 *Fallen vier Aehnlichkeitspunkte in einen zusammen, so decken sich alle sechs,* und es ist daher eine jede durch diesen sechsfachen Punkt gehende Gerade eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe.

6 Nach Obigem können vier p. ä. Systeme einen vielfachen Aehnlichkeitspunkt haben, und zwar können zwei, drei oder alle sechs Aehnlichkeitspunkte zusammen fallen. Es ist aber auch möglich, dass zwei Aehnlichkeitsdoppelpunkte vorhanden sind, und es gilt dann der Satz: *Haben vier p. ä. Systeme zwei zweifache Aehnlichkeitspunkte,* fällt also zweimal der Aehnlichkeitspunkt je zweier Systeme mit dem der jeweiligen beiden andern zusammen, *so müssen in beiden Aehnlichkeitsdoppelpunkten entweder gleichartige oder ungleichartige Aehnlichkeitspunkte zur Deckung gelangen.* Sind $h_1 > h_2 > h_3 > h_4$ vier p. ä. Strecken, so muss von einer jeden p. ä. Punktgruppe P_1, P_2, P_3, P_4 der Punkt P_4 auf der Fläche des Winkels $P_2\ P_1\ P_3$ ausserhalb oder innerhalb des Dreiecks $P_1\ P_2\ P_3$ liegen, je nachdem die beiden Aehnlichkeitsdoppelpunkte von gleichartigen oder ungleichartigen Aehnlichkeitspunkten gebildet werden. In analoger Weise ist überhaupt durch drei Punkte die Lage des jeweiligen vierten einer p. ä. Punktgruppe bestimmt. Als Paare der Aehnlichkeitsdoppelpunkte können bezüglich nur je zwei von

$$A_{12}\ A_{34},\ A_{13}\ A_{24},\ J_{14}\ J_{23} \qquad J_{12}\ A_{34},\ J_{13}\ A_{24},\ J_{14}\ A_{23}$$

auftreten.

7 Während die Grössen von je vier p. ä. Strecken im allgemeinen von einander unabhängig sind, so ist das nicht mehr der Fall, sobald die Systeme zwei Aehnlichkeitsdoppelpunkte haben. Werden zur Verbindungsgeraden zweier Punkte einer p. ä. Gruppe Parallelen durch die beiden andern gezogen, so wird durch dieselben die Verbindungsstrecke der beiden Aehnlichkeitsdoppelpunkte äusserlich oder innerlich geteilt. Indem man einen Teil auf verschiedene Weise ausdrückt, gelangt man zu dem Satze: *Haben vier p. ä.*

Systeme eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe, auf welcher zweimal bezüglich zwei

gleichartige | *ungleichartige*

Aehnlichkeitspunkte sich decken, so besteht zwischen je vier p. ä. Strecken $h_1 > h_2 > h_3 > h_4$ *bezüglich die Relation:*

$$\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = 0 \qquad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_4} = 0$$

Vier gleichwendig ähnliche Systeme können stets so in perspektivische Lage gebracht werden, dass sie eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe haben; hierbei können drei Punkte einer Gruppe von vier p. ä. Punkten beliebig festgelegt werden, der entsprechende vierte muss aber dann auf einer (leicht bestimmbaren) Parallelen zu der durch die Aehnlichkeitspunkte der drei andern Systeme schon fixierten gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxe liegen.

§ 14. Vier perspektivisch ähnliche centrische Systeme geben sechs äusseren und sechs inneren Aehnlichkeitspunkten den Ursprung. Dieselben liegen zu je drei auf 4 äusseren und 12 inneren Aehnlichkeitsaxen. Durch jeden der 12 Aehnlichkeitspunkte gehen 4 der 16 Aehnlichkeitsaxen, und zwar durch jeden äusseren Aehnlichkeitspunkt 2 äussere und 2 innere Axen und durch jeden inneren Aehnlichkeitspunkt 4 innere Axen.

Fallen 4 und also 6 Aehnlichkeitspunkte in eine Gerade, decken sich also 4 Axen, so haben vier p. ä. centrische Systeme eine gemeinschaftliche Axe und noch 12 Axen. Liegen von den Aehnlichkeitspunkten bezüglich

6 A | 3 A und 3 J | 2 A und 4 J

oder von den Aehnlichkeitsaxen bezüglich

4 a | 1 a und 3 i | 4 i

in einer Geraden, so haben die vier p. ä. centrischen Systeme bezüglich

1 g und 12 i | 1 g', 3 a und 9 i | 1 g'', 4 a und 8 i

zu Aehnlichkeitsaxen und von den vier Mittelpunkten der p. ä. centrischen Systeme liegen bezüglich auf der einen Seite

alle 4. | 3, auf der andern 1. | 2, auf der andern 2.

Die Bedingungen, unter denen vier p. ä. centrische Systeme zwei gemeinschaftliche Axen haben, können in folgender Weise ermittelt werden: Sind von den Systemen drei mit ihren Aehnlichkeitsaxen festgelegt, so muss der Mittelpunkt des vierten Systems

eine solche Lage haben, dass die beiden Aehnlichkeitspunkte des vierten Systems mit einem der drei festgelegten auf zwei Aehnlichkeitsaxen der letzteren liegen. Dann fallen nach § 11,2 die Aehnlichkeitspunkte des vierten Systems mit den beiden übrigen Systemen auch auf diese zwei Aehnlichkeitsaxen, die dann also allen vier Systemen gemeinschaftlich sind. Mit Hilfe des Satzes, dass ein harmonisches Strahlenbüschel durch jede Gerade in vier harmonischen Punkten geschnitten wird, ergiebt sich nun unter Beachtung von § 10,2 die Bedingung: *Sollen vier p. ä. centrische Systeme zwei gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxen haben, so müssen immer zwei, unter Umständen* (§ 11,3) *sogar drei Aehnlichkeitspunkte zusammenfallen.* Umgekehrt ergeben sich die Sätze:

Decken sich zwei Aehnlichkeitspunkte, fällt mithin ein Aehnlichkeitspunkt zweier von vier p. ä. centrischen Systemen mit einem der beiden andern zusammen, so resultieren zwei durch den zweifachen Aehnlichkeitspunkt gehende gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxen, welche die beiden von dem Doppelpunkt nach den Mittelpunkten der Systeme gezogenen Geraden harmonisch trennen. Fallen zwei äussere Aehnlichkeitspunkte A_{12} und A_{34} zusammen, so liegen von den Mittelpunkten der 4 p. ä. centrischen Systeme 4 auf einer Seite der einen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxe g_{1234} und je 2 auf jeder Seite der andern $g_{12,34}$. Fallen ein äusserer und ein innerer Aehnlichkeitspunkt A_{12} und J_{34} zusammen, so liegen von den 4 Mittelpunkten je 3 auf einer und 1 auf der andern Seite einer jeden der beiden gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxen $g_{123,4}$ und $g_{124,3}$. Fallen endlich zwei innere Aehnlichkeitspunkte J_{12} und J_{34} zusammen, so liegen von den 4 Mittelpunkten je 2 auf jeder Seite der beiden gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxen $g_{14,23}$ und $g_{13,24}$.

Fallen drei Aehnlichkeitspunkte zusammen, so haben die vier p. ä. centrischen Systeme zwei durch den dreifachen Aehnlichkeitspunkt gehende gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxen; dieselben sind durch die beiden von dem dreifachen Punkt nach den Mittelpunkten der Systeme gezogenen Geraden harmonisch getrennt. Sind die sich deckenden Aehnlichkeitspunkte drei äussere A_{12}, A_{13} und A_{23}, so liegen die 4 Mittelpunkte auf einer Seite der einen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxe g_{1234} und zu 3 und 1 auf den Seiten der andern $g_{123,4}$. Sind die zusammenfallenden

Aehnlichkeitspunkte ein äusserer A_{12} und zwei innere J_{13} u. J_{23}, so liegen die 4 Mittelpunkte zu je 2 auf jeder Seite der einen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxe $g_{12,34}$ und zu 3 und 1 auf den Seiten der andern $g_{124,3}$.

Vereinigen sich v i e r *und in Folge dessen alle 6 Aehnlichkeitspunkte in einem, so ist jede durch diesen sechsfachen Aehnlichkeitspunkt gezogene Gerade eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe.*

Haben vier p. ä. centrische Systeme z w e i *zweifache Aehnlichkeitspunkte,* fällt also zweimal ein Aehnlichkeitspunkt je zweier von vier p. ä. centrischen Systemen mit einem der jeweiligen beiden andern zusammen, *so haben die Systeme auch noch einen dritten, und zwar muss ein jeder der drei zweifachen Aehnlichkeitspunkte je nach der gegenseitigen Lage der Mittelpunkte der Systeme, entweder von zwei gleichartigen oder ungleichartigen Aehnlichkeitspunkten gebildet werden.**) *Die Verbindungsgeraden je zweier Aehnlichkeitsdoppelpunkte sind die drei gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxen der Systeme.* Bedeuten $h_1 > h_2 > h_3 > h_4$ wieder vier p. ä. Strecken, so gilt über die Lage des Mittelpunktes M_4 des Systems Σ_4, das in § 13,6 vom Punkte P_4 gesagte, und es ist, wenn dreimal bezüglich je zwei

gleichartige — ungleichartige

Aehnlichkeitspunkte zu den drei Doppelpunkten sich vereinigen, M_4 nach § 12,3 bezüglich identisch mit dem Punkte

$O_{23,1}$ — O_{123}

der Systeme Σ_1 Σ_2 Σ_3. In analoger Weise ist überhaupt durch drei Mittelpunkte der Systeme die Lage des jeweiligen vierten bestimmt. Die drei Doppelpunkte können bezüglich n u r sein:

$A_{12}\ A_{34}\ ,\ A_{13}\ A_{24}\ ,\ I_{14}\ I_{23}$ — $I_{12}\ A_{34}\ ,\ I_{13}\ A_{24}\ ,\ I_{14}\ A_{23}$

und es besteht zwischen vier p. ä. Strecken wie in § 13,7 bezüglich die Gleichung:

$$\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = 0 \qquad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_4} = 0$$

Mehr als drei gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxen können vier p. ä. centrische Systeme nicht haben.

---

*) Diesen Satz und einige andere, angewendet auf ein System von vier Kreisen, enthält die Abhandlung von Fr. G. A f f o l t e r: „Zur Geometrie des Kreises und der Kugel. Archiv d. Math. u. Phys. 1875, Teil 57, pag. 56.“ Es ist daselbst jedoch fälschlicher Weise betont, dass die zusammenfallenden Aehnlichkeitspunkte nur gleichartige sein könnten.

Hierbei ist selbstverständlich der Fall ausgenommen, dass sechs Aehnlichkeitspunkte zusammenfallen.

10 Vier ähnliche centrische Systeme können **stets** so in perspektivische Lage gebracht werden, dass sie **eine** oder **zwei** gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxen besitzen. Dabei können die Mittelpunkte dreier Systeme beliebig festgelegt werden; der Ort des vierten ist aber dann im ersten Falle auf zwei leicht bestimmbare Parallelen zur gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxe beschränkt und im zweiten nach § $14,_{4-5}$ vierdeutig bestimmt.

11 Vier ähnliche centrische Systeme können **nur** dann so perspektivisch gemacht werden, dass sie **drei** gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxen haben, wenn vier p. ä. Strecken einer der obigen Gleichungen (§ $14,_8$) genügen. Dabei können die Mittelpunkte dreier Systeme willkürlich gewählt werden, der des vierten ist aber dann nach § $14,_7$ als ein Punkt O der drei ersteren Systeme eindeutig bestimmt.

12 Sind die Systeme z. B. Kreise, so folgt hieraus: *Vier Kreise können höchstens von drei Geraden gleichwinklig geschnitten werden,* vorausgesetzt, dass ihre Mittelpunkte obiger Bedingung gemäss bestimmt sind, und ihre Radien $r_1 > r_2 > r_3 > r_4$ einer der Gleichungen

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = 0 \qquad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} = 0$$

genügen. In letzterem Falle können die Kreise besonders auch so angeordnet werden, dass sie von allen drei Geraden unter einem und demselben Winkel geschnitten oder berührt werden. In ersterem Falle ist dies nur mit zwei der drei Geraden möglich, und zwar mit den beiden, welche durch den Aehnlichkeitsdoppelpunkt J_{14} J_{23} gehen.

1 § 15. Fünf und noch mehr p. ä. Systeme in gleicher Weise zu behandeln, wie dies mit zwei bis vier Systemen geschehen ist, würde zu weit führen. Im Folgenden wird daher nur das Hauptsächlichste von n (> 4) p. ä. Systemen gegeben. Der Kürze des Ausdruckes wegen empfiehlt es sich, für bestimmte Mannigfaltigkeiten von p. ä. Gebilden besondere Namen einzuführen. Die Gesamtheit aller p. ä. Kurven (Systeme) mit gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt soll eine **lineare Reihe** und die Gesamtheit aller

p. ä. Kurven mit gemeinsamer Aehnlichkeitsaxe ein planares System genannt werden*).

Die Anzahl der Aehnlichkeitspunkte und Axen lässt sich mit Hilfe der Lehre von den Kombinationen leicht bestimmen. *Es geben n p. ä. Systeme paarweise* $\frac{n(n-1)}{2}$ *Aehnlichkeitspunkten den Ursprung, welche zu je 3 in* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ *Aehnlichkeitsaxen liegen, von denen je* $(n-2)$ *durch einen Aehnlichkeitspunkt gehen.*

Sind je n p. ä. Strahlen gleichgerichtet, so haben die Systeme nur äussere Aehnlichkeitspunkte und Axen. Sind jedoch nur k Strahlen gleich- und die übrigen $(n-k)$ entgegengesetzt gerichtet, so zerfallen die n Systeme in zwei Gruppen von k und $(n-k)$ Systemen. Je zwei Systeme nun sind positiv ähnlich, wenn sie derselben Gruppe, aber negativ ähnlich, wenn sie verschiedenen Gruppen angehören, und *es sind daher* $k(n-k)$ *innere und mithin* $\frac{n(n-1)}{2} - k(n-k)$ *äussere Aehnlichkeitspunkte vorhanden.*

Da durch jeden der $k(n-k)$ inneren Aehnlichkeitspunkte $(n-2)$ Aehnlichkeitsaxen (selbstverständlich nur innere) gehen, und jede derselben noch einen inneren Aehnlichkeitspunkt enthält, so folgt, dass $\frac{k(n-k)(n-2)}{2}$ *innere und mithin* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{k(n-k)(n-2)}{2}$ *äussere Aehnlichkeitsaxen vorhanden sind.*

Da $k + (n-k) = n$, also konstant ist, so erreicht das Produkt $k(n-k)$ sein Maximum, wenn die Differenz der Faktoren ein Minimum wird**). Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Maximal- und Minimalzahlen der äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkte und Axen leicht bestimmen. Werden dieselben kurz mit A, J, a, i bezeichnet, so ergiebt sich folgende Uebersicht für eine gerade oder ungerade Anzahl n der Systeme:

---

*) Die Namen sind W. Fiedler's Cyklographie (p. 17 und p. 23) entlehnt, woselbst für den Specialfall, dass die p. ä. Kurven Kreise sind, die Ausdrücke „lineare Kreisreihe“ und „planares Kreissystem“ gebraucht werden, und zahlreiche, diese Gebilde betreffende Aufgaben ihre Lösung finden.

**) Ein einfacher geometrischer Beweis befindet sich in J. Steiner, Vorlesungen über synthet. Geometrie. II. 1876. Anmerkung p. 41.

Für $n = 2m$ ist:

$$A_{max} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad J_{min} = 0$$

$$A_{min} = \frac{n(n-2)}{4} \qquad J_{max} = \frac{n^2}{4}$$

$$a_{max} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \qquad i_{min} = 0$$

$$a_{min} = \frac{n(n-2)(n-4)}{24} \qquad i_{max} = \frac{n^2(n-2)}{8}$$

Für $n = 2m + 1$ ist:

$$A_{max} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad J_{min} = 0$$

$$A_{min} = \frac{(n-1)^2}{4} \qquad J_{max} = \frac{n^2-1}{4}$$

$$a_{max} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \qquad i_{min} = 0$$

$$a_{min} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \qquad i_{max} = \frac{(n^2-1)(n-2)}{8}$$

6 *Fallen alle Aehnlichkeitspunkte und mithin alle Aehnlichkeitsaxen in eine Gerade, so bilden die Systeme ein planares System, und je n p. ä. Gebilde derselben werden von der gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxe in den entsprechenden Punkten gleichwinklig geschnitten.* Je zwei p. ä. Punktgruppen von n p. ä. Systemen mit gemeinschaftlicher Aehnlichkeitsaxe sind affin.

7 Bei Untersuchung der Bedingungen, welchen die Aehnlichkeitspunkte genügen müssen, damit die Systeme eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe haben, ist es der Kürze des Ausdrucks wegen von Vorteil, folgende Benennung zu gebrauchen: Je $(n - 1)$ Aehnlichkeitspunkte von n p. ä. Systemen sollen eine Kette genannt werden, wenn alle n Punkte einer p. ä. Punktgruppe — nur durch die, den betreffenden $(n - 1)$ Aehnlichkeitspunkten zukommenden Aehnlichkeitsstrahlen verbunden — ein zusammenhängendes Ganze bilden. Es ist ohne weiteres klar, dass die Indices der Aehnlichkeitspunkte einer Kette jede Systemnummer mindestens einmal enthalten. Die Aehnlichkeitspunkte eines Systems mit den übrigen bilden z. B. eine Kette.

8 Unter Anwendung von § 11,2 ergiebt sich aus dem Vorstehenden: *Liegen von n p. ä. Systemen mehr als (n — 2) Aehnlichkeitspunkte,*

unter denen irgend $(n - 1)$ eine Kette bilden, in einer Geraden, so fallen alle Aehnlichkeitspunkte in diese Gerade, und die Systeme haben also eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe.

9 Es fragt sich nun, wie viel in einer Geraden liegende Aehnlichkeitspunkte, ohne die Voraussetzung obiger Bedingung, eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe bestimmen. Ihre Zahl muss die Summe der Aehnlichkeitspunkte von $(n - 1)$ Systemen übersteigen, damit der Fall nicht eintreten kann, dass sie sämtlich nur $(n - 1)$ Systemen zugehören und also dann keine Kette von n Systemen enthalten. Es folgt daher: *Liegen von n p. ä. Systemen mehr als $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Aehnlichkeitspunkte in einer Geraden, so liegen alle in derselben, und die Systeme haben also eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe.*

10 *Bilden n p. ä. Systeme eine lineare Reihe, so ist jede durch den Aehnlichkeitspunkt derselben gehende Gerade eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe.* Aus den Sätzen § 15,8—9 folgt:

11 *Fallen mehr als $(n - 2)$ Aehnlichkeitspunkte, unter denen irgend $(n - 1)$ eine Kette bilden, und mithin alle in einen Punkt zusammen, so bilden die n p. ä. Systeme eine lineare Reihe.*

12 *Decken sich mehr als $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ und mithin alle Aehnlichkeitspunkte, so bilden die n p. ä. Systeme eine lineare Reihe.*

13 *Bilden n p. ä. Systeme zwei lineare, mit ihren Aehnlichkeitspunkten zusammenfallende Reihen, so haben sie eine durch diesen vielfachen Aehnlichkeitspunkt gehende gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe.* Es ergiebt sich mit Hilfe § 15,11 ferner:

14 *Fallen mehr als $(n - 3)$ Aehnlichkeitspunkte, unter denen irgend $(k - 1)$ eine Kette von k Systemen und $(n - k - 1)$ eine Kette der übrigen $(n - k)$ Systeme bilden, und mithin*

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - k(n-k)$$

Aehnlichkeitspunkte in einen zusammen, so bilden die n p. ä. Systeme zwei lineare, mit ihren Aehnlichkeitspunkten zusammenfallende Reihen von k und $(n - k)$ Systemen.

15 Da die Zahl der zusammenfallenden Aehnlichkeitspunkte am kleinsten wird, wenn $k(n - k)$ sein Maximum erreicht, so folgt nach § 15,5, dass in dem vielfachen Aehnlichkeitspunkt bei gerader

Anzahl n der Systeme wenigstens $\frac{n(n-2)}{4}$ und bei ungerader wenigstens $\frac{(n-1)^2}{4}$ Aehnlichkeitspunkte sich decken, und dass dies dann eintritt, wenn die linearen Reihen von $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}$ Systemen bei geradem n und von $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ Systemen bei ungeradem n gebildet werden.

16 Es können n gleichwendig ähnliche Systeme stets so in perspektivische Lage gebracht werden, dass sie eine oder unzählige gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxen haben. Hierbei können im ersten Falle drei, im zweiten Falle zwei Punkte einer Gruppe von n p. ä. Punkten beliebig festgelegt werden. Jeder der übrigen $(n-3)$ Punkte derselben muss aber dann im ersten Falle auf einer von je zwei (leicht bestimmbaren) Parallelen zu der (durch die Aehnlichkeitspunkte der ersten drei Systeme schon fixierten) gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxe liegen. Im zweiten Falle ist aber dann jeder der übrigen $(n-2)$ Punkte der Gruppe auf der durch die ersten beiden Punkte festgelegten Geraden zweideutig bestimmt.

1 § 16. Für n p. ä. centrische Systeme folgt unter Beachtung von § 12 und § 15: *Es geben n p. ä. centrische Systeme paarweise $\frac{n(n-1)}{2}$ äusseren und $\frac{n(n-1)}{2}$ inneren Aehnlichkeitspunkten den Ursprung, welche zu je 3 in $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ äusseren und $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ inneren Aehnlichkeitsaxen liegen, von denen je $2(n-2)$ durch einen Aehnlichkeitspunkt gehen und zwar durch jeden äusseren $(n-2)$ äussere und $(n-2)$ innere Axen und durch jeden inneren Aehnlichkeitspunkt $2(n-2)$ innere Axen.*

2 *Fallen $\frac{n(n-1)}{2}$ Aehnlichkeitspunkte und mithin $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ Aehnlichkeitsaxen in eine Gerade, so bilden die n p. ä. centrischen Systeme ein planares System, und haben also eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe* und $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ andre Axen. Es gelten auch hier die Sätze § 15,6—9, nur mit dem Unterschied, dass dort

sämtliche, hier die Hälfte der vorhandenen Aehnlichkeitspunkte auf der gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxe liegen.

Fällt das Centrum von e i n e m *System auf die gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe, so liegen alle n Centra der Systeme auf derselben.*

Fallen $\frac{n(n-1)}{2}$ *Aehnlichkeitspunkte in einen Punkt zusammen, so bilden die n p. ä. centrischen Systeme eine lineare Reihe, und jede durch diesen vielfachen Punkt gehende Gerade ist also eine gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxe.* Es gelten auch hier wieder die Sätze § 15,11—12 mit obiger Abänderung.

Bilden n p. ä. centrische Systeme zwei lineare Reihen mit zusammenfallenden Aehnlichkeitspunkten, so haben die Systeme z w e i *gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxen, welche durch die Centralen der Systeme harmonisch getrennt sind.* Bilden k Systeme die eine lineare Reihe und also $(n-k)$ Systeme die andere, so liegen von den $n(n-1)$ Aehnlichkeitspunkten der n Systeme ausser dem $\frac{n(n-1)}{2} - k(n-k)$ fachen Aehnlichkeitspunkt $k(n-k)$ auf jeder der beiden gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxen und $\frac{k(k-1)}{2}$ und $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ auf den Centralen. Es haben hier ferner die Sätze § 15,14—15 Geltung.

Mehr als zwei gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxen können n (> 4) p. ä. centrische Systeme nicht haben, mit Ausnahme des Falles, dass sie eine lineare Reihe bilden.

Es können n ähnliche centrische Systeme s t e t s so in perspektivische Lage gebracht werden, dass sie eine, zwei oder unzählig viele gemeinschaftliche Aehnlichkeitsaxen haben. Dabei können in den ersten beiden Fällen die Mittelpunkte dreier, im letzten Falle die Mittelpunkte zweier Systeme beliebig festgelegt werden. Der Ort für den Mittelpunkt jedes andern Systems ist aber dann im ersten Fall auf zwei leicht bestimmbare Parallelen zur gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsaxe beschränkt, im zweiten Falle vierdeutig auf den beiden Centralen und im dritten Falle zweideutig auf der Centrale bestimmt.

§ 17. Es möge noch eine Untersuchung, soweit sie sich auf perspektivische Aehnlichkeit erstreckt, über vier Punkte P_1 P_2 P_3 P_4 einer Geraden und die sechs Kreise folgen, welche je zwei

der Punkte zu Endpunkten eines Durchmessers haben. Es können dreimal je zwei der vier Punkte und ihr zugehöriger Kreis als ein p. ä. centrisches System zu dem aufgefasst werden, welches von den jeweiligen beiden andern Punkten und ihrem zugehörigen Kreise gebildet wird. Es resultieren also drei Paare p. ä. centrischer Systeme. Da jeder Kreis von den vier Kreisen, welche den beiden andern Systempaaren zugehören, berührt wird, so lässt sich mit Hilfe der Inversion (§ 27,3) leicht erweisen, dass je zwei Systempaare einen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitspunkt haben. *Es fallen also die sechs Aehnlichkeitspunkte der drei Paare von p. ä. centrischen Systemeu in drei Doppelpunkte zusammen.*

2 Werden die Kreise mit C und die Punkte P der Kürze wegen nur durch ihre Indices bezeichnet, so lassen sich die Systempaare wie folgt übersichtlich darstellen:

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & C_1 & 2 \\ 3 & C_2 & 4 \end{array}\right\} A''; +\mu \qquad \left.\begin{array}{ccc} 1 & C_1 & 2 \\ 4 & C_2 & 3 \end{array}\right\} A'; -\mu$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & C'_1 & 3 \\ 2 & C'_2 & 4 \end{array}\right\} A''; +\mu' \qquad \left.\begin{array}{ccc} 1 & C'_1 & 3 \\ 4 & C'_2 & 2 \end{array}\right\} A; -\mu'$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & C''_1 & 4 \\ 2 & C''_2 & 3 \end{array}\right\} A'; +\mu'' \qquad \left.\begin{array}{ccc} 1 & C''_1 & 4 \\ 3 & C''_2 & 2 \end{array}\right\} A; -\mu''$$

Ist $P_1\ P_2 > P_3\ P_4$, so haben die vier Punkte P und ihre drei Aehnlichkeitsdoppelpunkte folgende Anordnung:

$$P_1\ P_2\ A\ A'\ P_3\ P_4\ A'',$$

und die Aehnlihckeitsverhältnisse μ_{12}, μ'_{12} und μ''_{12} sind sämmtlich unechte Brüche.

3 Da die sechs Strecken, welche durch vier Punkte einer Geraden (oder eines Kreises) bestimmt werden, der Bedingung

$$\overline{12}.\ \overline{23}.\ \overline{31} - \overline{23}.\ \overline{24}.\ \overline{42} + \overline{34}.\ \overline{41}.\ \overline{13} - \overline{41}.\ \overline{12}.\ \overline{24} = 0$$

genügen *), die nach Division durch das zweite Glied in die Gleichung

---

*) Sind 1 2 3 4 die Ecken eines nicht überschlagenen Sehnenvierecks, so lässt sich aus dem Lehrsatz des Ptolemäus für das Produkt der Diagonalen bekanntlich für den Quotient derselben die Relation

$$\frac{\overline{13}}{\overline{24}} = \frac{\overline{23}.\ \overline{34} + \overline{41}.\ \overline{12}}{\overline{12}.\ \overline{23} + \overline{34}.\ \overline{41}}$$

herleiten, welche sich auch in obiger Form schreiben lässt.

$$\frac{\overline{12}.\ 13}{34.\ 24} - \frac{\overline{12}.\ 14}{43.\ 23} + \frac{13.\ 14}{42.\ 32} = 1$$

übergeführt werden kann, so ergiebt sich durch Einführung der sechs Aehnlichkeitsverhältnisse der drei Aehnlichkeitsdoppelpunkte die elegante Beziehung:

$$(+\mu)(+\mu')+(+\mu'')(-\mu)+(-\mu')(-\mu'')=1$$

Die Summe der Produkte der den Aehnlichkeitsdoppelpunkten zugehörigen Aehnlichkeitsverhältnisse ist gleich 1.

Da jedes Kreispaar aus einem der beiden andern durch Vertauschung zweier Punkte P hervorgeht, so folgt: *Die Mittelpunkte der drei Kreispaare bilden ein centrisches System*

$$\left.\begin{matrix} C_1 & C'_1 & C''_1 \\ C_2 & C'_2 & C''_2 \end{matrix}\right\} E;\ -1,$$

oder die über den Centralen der drei Kreispaare als Durchmesser beschriebenen Kreise haben denselben Mittelpunkt E *).

§ 18. Das Princip der perspektivischen Aehnlichkeit kann in vielen Fällen zum Lösen von Aufgaben und Beweisen von Sätzen mit grossem Vorteil angewendet werden, besonders dann, wenn es gelingt, eine Figur in zwei oder mehrere perspektivisch ähnliche Systeme zu zerlegen. Beispielsweise sei darauf hingewiesen, dass die perspektivische Aehnlichkeit „den Zusammenhang einiger häufig betrachteten merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks auf eine eigentümliche Weise aufklärt“**). Als ein weiteres Beispiel sei der Steiner'sche Beweis des Pascal'schen Satzes über das Kreissechseck erwähnt***), bei welchem besonders die Sätze des § 11 dieser Abhandlung zur Anwendung kommen.

---

*) Bleibt bei jedem von zwei veränderlichen Kreisen, deren Mittelpunkte sich auf einer festen Geraden bewegen, ein Schnittpunkt mit derselben in Ruhe, während die beiden andern Schnittpunkte nach entgegengesetzten Richtungen fortrücken, so bewegen sich auch die Mittelpunkte der Kreise nach entgegengesetzten Seiten um gleiche und zwar halb so grosse Strecken.

**) J. Steiner, die geom. Constructionen etc., § 12 oder Ges. W. Bd. I, pag. 489. Sätze der Anmerkung.

J. Lange, ein Beitrag zur Theorie der merkwürdigen Punkte im Dreieck. Grunerts Archiv. Teil 66. 1881, pag. 220.

***) J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie. I. § 4.

II.

Die Inversion in perspektivischer Lage.

§ 19. Nach § 2 gehören in Bezug auf ein Aehnlichkeitscentrum I vom Aehnlichkeitsverhältnis $\mu_{12} = \pm\mu$ zu jedem Punkte R zwei perspektivisch ähnliche, nicht zusammenfallende Punkte P_1 und P_2, je nachdem R als zu dem einen oder andern System gehörig betrachtet wird. Es gelten die Gleichungen:

$$IP_1 = \pm \mu_{12}\, IR \qquad \text{und} \qquad IP_2 = \pm \mu_{21}\, IR,$$

welche, da $\mu_{12} \cdot \mu_{21} = \pm 1$ ist, je nachdem μ_{12} in beiden Fällen mit gleichen oder verschiedenen Vorzeichen genommen wird, durch Multiplikation zu der von μ_{12} unabhängigen Beziehung je zweier Punkte P_1 und P_2 zu den beiden festen Punkten R und I führen:

$$IP_1 \,.\, IP_2 = \pm IR^2 = p.$$

Das Produkt der Entfernungen je zweier dem Punkte R in Bezug auf I als Aehnlichkeitspunkt von beliebigem Aehnlichkeitsverhältnis perspektivisch ähnlichen Punkte P_1 und P_2 ist also konstant, und es ist somit zwischen je zwei Punkten einer durch einen festen Punkt gehenden Geraden eine neue Art der Zuordnung hergestellt, welche die Namen Kreisverwandtschaft (im engeren Sinne), Princip der reciproken Radien oder der circularen Inversion oder der sphärischen Spiegelung führt*).

---

*) Von der reichhaltigen Litteratur seien erwähnt:

Poncelet, Traité des propriétés projectives des Figures, 1822 (1865).

J. Steiner, Einige geometrische Betrachtungen. Crelle's Journal, Band I, pag. 161, oder Gesammelte Werke, Bd. I, pag. 17.

— , Die geom. Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. 1883. Ges. W. Bd. I. pag. 461.

Plücker, Analytisch-geometrische Aphorismen. Crelle's Journ., Bd. XI, p. 219.

— , Analytisch-geometrische Entwickelungen. Bd. I. 1828. No. 184.

W. Thomson, Principe des images électriques. Liouville Journ. d. Math. 1845. T. 10, p. 364.

— , Liouville Journ. d. Math. 1847. T. 12, p. 256.

Liouville, Journal de Mathématiques. 1847. T. 12, p. 265.

Moebius, Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren. Berichte der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. V, 1853. p. 14—24. Ges. W. Bd. II.

Zwei Systeme Σ_1 und Σ_2 sind nach dem Princip der circularen Inversion perspektivisch auf einander bezogen, wenn jedem Punkt P_1 des einen ein Punkt P_2 des andern zugeordnet ist, welcher mit ihm und einem festen Punkte I in einer Geraden liegt und zwar so, dass das Produkt p der Entfernungen beider Punkte von dem festen Punkte konstant ist. Je zwei einander zugeordnete Punkte werden potenzhaltend, conjugiert, reciprok oder invers (perspektivisch invers) genannt, der feste Punkt I heisst Inversionscentrum, das konstante Produkt p Potenz und der um I — mit einem Radius r gleich der Quadratwurzel aus der (absolut genommenen) Konstante p — beschriebene Kreis i Potenz- oder Inversionskreis. Je nachdem nun p positiv oder negativ ist, sind die Strecken IP_1 und IP_2 gleich- oder gegengerichtet, und es sind daher zwei Arten perspektivisch inverser Punkte zu unterscheiden, deren Definitionen lauten:

In Bezug auf ein Inversionscentrum I von positiver Potenz $p = +r^2$ sind je zwei Punkte P_1 und P_2 positiv perspektivisch invers, welche von I aus nach ein und derselben Richtung, (also mit I in einer Geraden) liegen und deren Entfernungsprodukt $IP_1 . IP_2$ konstant und zwar gleich p, dem

In Bezug auf ein Inversionscentrum I von negativer Potenz $p = -r^2$ sind je zwei Punkte P_1 und P_2 negativ perspektivisch invers, welche von I aus nach entgegengesetzten Richtungen, (also mit I in einer Geraden) liegen und deren Entfernungsprodukt $IP_1 . IP_2$ konstant und zwar gleich p, dem

Moebius, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. Abhandlungen d. Kgl. Sächs. Ges. d. W. Bd. II. 1855, p. 529–595.

E. Heine, Kugelfunktionen. Bd. II. § 66, p. 251 (enthält Mitteilungen über Thomson u. Liouville).

Th. Reye, Synthetische Geom. d. Kugeln u. linearen Kugelsysteme. 1878, § 3 (enthält in der Einleitung kurz die historische Entwickelung).

G. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen. 1882. p. 25.

W. Fiedler, Cyklographie 1882. p. 82.

— , Die darstellende Geometrie in organ. Verbindung mit der Geometrie der Lage. 1883. Bd. I. p. 220.

R. Baltzer, Elemente der Mathematik. Bd. II. § 14,4.

*Quadrate des Radius r des Inversionskreises ist***)†).

*negativen Quadrate des Radius r des Inversionskreises ist***).

(Der negative Inversionskreis lässt sich auch als positiver Inversionskreis von imagiärem Radius betrachten.)

4 Jeder Punkt P_1 der Ebene besitzt in Bezug auf ein Inversionscentrum I von der Potenz p, oder kürzer, in Bezug auf einen Inversionskreis i nur e i n e n perspektivisch inversen Punkt P_2, welcher im allgemeinen nicht mit ihm zusammenfällt. Dem Punktpaar $P_1 P_2$, als zu Σ_1 gehörig betrachtet, ist das Punktpaar P_2 P_1 in Σ_2 perspektivisch invers, und da dasselbe für jedes perspektivisch inverse Punktpaar gilt, so folgt der Satz: *Perspektivisch inverse Systeme sind involutorisch.*

1 § 20. *Die von perspektivisch inversen Punktpaaren P_1 Q_1 und P_2 Q_2 mit dem Inversionscentrum gebildeten Dreiecke I P_1 Q_1 und I Q_2 P_2 sind g e g e n w e n d i g ähnlich,* desgleichen die Dreiecke I P_1 Q_2 und I Q_1 P_2, da auch P_1 Q_2 und P_2 Q_1 perspektivisch inverse Punktpaare sind.

2 Ist R ein beliebiger Punkt des Inversionskreises, sind R' und R'' dagegen die Punkte desselben, welche auf der Geraden P_1 P_2 liegen, so kann leicht mit Hilfe des Vorstehenden gefolgert werden, dass die Geraden RR' und RR'' die von R P_1 und R P_2 gebildeten Winkel halbieren. Die vier von R ausgehenden Strahlen bilden also ein harmonisches

**) Da die Ausdrücke *positiv perspektivisch invers* und *negativ perspektivisch invers* oft wiederkehren, so sollen dieselben durch die einfacheren *positiv invers* und *negativ invers* ersetzt werden.

†) Die Inversion führt, wie oben erwähnt, auch den Namen „sphärische Spiegelung“, da beim sphärischen Konvex- oder Konkavspiegel entsprechende Gegenstands- und Bildpunkte p o s i t i v invers sind in Bezug auf eine Inversionskugel, deren Centrum der Brennpunkt und deren Radius gleich der Brennweite ist.

Büschel, und es ergiebt sich der Satz:

Auf jeder durch das Inversionscentrum gehenden Geraden sind die beiden Punkte des Inversionskreises durch je zwei positiv inverse Punkte harmonisch getrennt. Umgekehrt folgt: *Von vier harmonischen Punkten sind je zwei harmonisch getrennte Punkte positiv invers in Bezug auf den Kreis als Inversionskreis, von welchem die beiden andern Punkte Endpunkte eines Durchmessers sind.*

Die harmonische Punktreihe ist sehr geeignet, aus perspektivisch inversen Beziehungen von Punkten Sätze über perspektivisch ähnliche abzuleiten, und umgekehrt. So folgt z. B. aus § 24,2 in Bezug auf die Punkte des § 10,2, dass die über $M_1 M_2$ und $A' A''$ als Durchmesser beschriebenen Kreise sich rechtwinklig schneiden*).

§ 21. Die Konstruktion perspektivisch inverser Punkte $P_1 P_2$ kann auf mannigfache Weise erfolgen, es empfiehlt sich die folgende:

Verbinde den Punkt P_1 mit dem einen Endpunkt A_1 des zum Radiusvektor IP_1 senkrechten Durchmessers $A_1 A_2$ des Inversionskreises und den anderen Kreisschnittpunkt B_1 der Geraden P_1A_1 mit A_2, so ist der Schnittpunkt P_2 der Geraden B_1A_2 mit

Verbinde den Punkt P_1 mit dem einen Endpunkt A_1 des zum Radiusvektor IP_1 senkrechten Durchmessers A_1A_2 des Inversionskreises und den diametralen Punkt B_2 des andern Kreisschnittpunktes B_1 der Geraden P_1A_1 mit A_1, so ist der Schnittpunkt P_2 der Ge-

*) Letzterer führt den Namen Aehnlichkeitskreis. *Für alle Punkte A desselben ist das Verhältniss* $M_1 A : M_2 A = M_1 A' : M_2 A' = M_1 A'' : M_2 A''$, *also konstant.* Da die Punkte M_1 und M_2 nach § 20,4 positiv invers in Bezug auf den Aehnlichkeitskreis sind, so gilt für sie der Satz § 20,2.

dem Radiusvektor der zu P_1 positiv inverse Punkt.

raden B_2A_1 mit der Rückwärtsverlängerung des Radiusvektor, der zu P_1 negativ inverse Punkt.

2 Mit Hilfe eines Inversors*) lässt sich auf mechanische Weise zu einer Figur die in Bezug auf einen Inversionskreis perspektivisch inverse ermitteln. Solche Mechanismen sind von Peaucellier, Hart u. A. entdeckt worden. Der Inversor von Peaucellier besteht aus einem Gelenkrhombus (von der Seite a), von welchem zwei gegenüberliegende Ecken C' und C'' durch gleichlange Glieder (c) mit einem festen Punkte I verbunden sind. Die beiden andern Eckpunkte P_1 und P_2 liegen mit I in einer Geraden, und ihr Entfernungsprodukt $I\,P_1 \,.\, I\,P_2$ ist konstant. (Siehe § 23,4.) Wird daher P_1 bewegt, so beschreibt P_2 für

$c > a$ die positiv inverse | $c < a$ die negativ inverse

Kurve.

1 § 22. *Alle unendlich fernen Elemente sind dem Inversionscentrum perspektivisch invers, und umgekehrt.* Je zwei perspektivisch inverse Punkte liegen auf verschiedenen Ufern des Inversionskreises, der eine ausserhalb der ander innerhalb desselben.

2 Zwei perspektivisch inverse Gebilde werden sich im allgemeinen nicht decken, fällt jedoch in Bezug auf einen Inversionskreis ein Gebilde mit seinem perspektivisch inversen zusammen, so soll dasselbe perspektivisch selbstinvers genannt werden. Die einzelnen Punkte eines derartigen Gebildes sind im allgemeinen nicht selbstinvers.

3 *Positiv inverse Punkte können sich decken. Es giebt also positiv selbstinverse Punkte.*

Jeder Punkt des Inversionskreises ist positiv selbstinvers.

Negativ inverse Punkte können sich nie decken. Es giebt also keine negativ selbstinversen Punkte.

Jedem Punkte des Inversionskreises ist der diametrale Punkt desselben negativ invers.

Der Inversionskreis als solcher ist perspektivisch selbstinvers.

---

*) Ueber Mechanismen für Erzeugung inverser Bewegungen handelt ausführlich L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Bd. I. 1888. p. 564—577. Von den zahlreichen Litteraturnachweisurgen seien angezogen:

Peaucellier, Nouvelles Annales de Mathématiques. Sér. II. 1864. T. III. p. 414 und Sér. II. 1873. T. XII. p. 71.

Hart, „On certain conversions of motion". Messenger of Mathematics. 1875. Vol. IV. p. 82.

Jede durch das Inversionscentrum gehende Gerade ist perspektivisch selbstinvers und wird deshalb Inversionsgerade genannt, und zwar ist

jeder Radiusvektor positiv selbstinvers, jedoch so, dass der innerhalb des Inversionskreises liegende Teil dem ausserhalb befindlichen positiv perspektivisch invers ist, und umgekehrt.

Die Bewegung zweier positiv inverser Punkte auf einem Radiusvektor geschieht nach entgegengesetzten Richtungen.

jedem Radiusvektor der gegengerichtete negativ invers, jedoch so, dass dem innerhalb des Inversionskreises liegenden Teile, der ausserhalb befindliche des gegengerichteten negativ invers ist, und umgekehrt.

Die Bewegung zweier negativ inverser Punkte auf zwei gegengerichteten Radienvektoren geschieht nach einer und derselben Richtung.

Auf jeder durch das Inversionscentrum gehenden Geraden bewegt sich also stets von zwei perspektivisch inversen Punkten, der eine nach dem Inversionscentrum hin, der andere von demselben ab.

§ 23. Einem begrenzten Flächenstücke, welches das Inversionscentrum einschliesst, ist die Ergänzungsfläche der inversen Begrenzung invers, und die Begrenzungskurven werden in gleichem Sinne durchlaufen. *Der Inversionskreisfläche ist die Inversionskreisergänzungsfläche invers.*

Einem begrenzten Flächenstücke, welches das Inversionscentrum ausschliesst, ist das Flächenstück der inversen Begrenzung invers, und die Begrenzungskurven werden in entgegengesetztem Sinne durchlaufen. Einem unendlich kleinen Flächenstück, welches das Inversionscentrum ausschliesst, ist wieder ein unendlich kleines Flächenstück invers, und ihre unendlich kleinen Begrenzungskurven werden in entgegengesetztem Sinne durchlaufen.

Inverse Flächenstücke schliessen beide entweder das Inversionscentrum aus oder ein.

Einem begrenzten Flächenstücke, dessen Begrenzungskurve durch das Inversionscentrum geht, ist der durch die inverse Begrenzung abgetrennte Teil der Ebene invers, welcher das Inversionscentrum ausschliesst.

§ 24. Aus dem Sekanten- resp. Sehnensatze der Planimetrie folgt:

Jeder durch zwei positiv inverse Punkte gelegte Kreis ist in Bezug auf den Inversionskreis positiv selbstinvers und schneidet denselben rechtwinklig.

Jeder durch zwei negativ inverse Punkte gelegte Kreis ist in Bezug auf den Inversionskreis negativ selbstinvers und schneidet denselben im Durchmesser, d. h. in diametralen Punkten des letzteren.

2 Nach § 20,3 ergiebt sich: *Auf jeder Geraden, welche durch den Mittelpunkt eines von zwei rechtwinklig sich schneidenden Kreisen geht, sind die Schnittpunkte des einen Kreises durch die des andern harmonisch getrennt, und umgekehrt.*

3 *Positiv selbstinverse Kurven schneiden den Inversionskreis im allgemeinen rechtwinklig.* Ist ein Schnittpunkt mit dem Inversionskreis gerade eine Spitze der Kurve, so bilden die beiden Aeste derselben mit dem Inversionskreis gleiche Winkel. Hat in einem Schnittpunkt mit dem Inversionskreis die Kurve einen Rückkehrpunkt, so berühren beide Aeste derselben den Inversionskreis.

Negativ selbstinverse Kurven schneiden den Inversionskreis im Durchmesser unter gleichen Winkeln.

4 *Jeder den Inversionskreis rechtwinklig schneidende Kreis ist in Bezug auf denselben positiv selbstinvers.*

Jeder den Inversionskreis im Durchmesser des letzteren schneidende Kreis ist negativ selbstinvers.

5 *Die Schnittpunkte zweier positiv selbstinversen Kreise sind zwei positiv inverse Punkte*).*

Die Schnittpunkte zweier negativ selbstinversen Kreise sind zwei negativ inverse Punkte).*

---

*) Mit Hilfe dieses Satzes erhellt nun sofort die inverse Beziehung der Punkte P_1 und P_2 des Peaucellier'schen Mechanismus (§ 21,2). Denkt man sich um C' und C'' als Mittelpunkte, Kreise mit dem Radius a beschrieben, so müssen dieselben perspektivisch selbstinvers in Bezug auf I als Inversions-

Die Schnittpunkte eines positiv und eines negativ selbstinversen Kreises sind weder positiv noch negativ inverse Punkte in Bezug auf den gemeinschaftlichen Inversionskreis beider selbstinversen Kreise.

Durch je zwei positiv inverse Punktpaare lässt sich stets ein in Bezug auf ihren Inversionskreis positiv selbstinverser Kreis legen.

Durch je zwei negativ inverse Punktpaare lässt sich stets ein in Bezug auf ihren Inversionskreis negativ selbstinverser Kreis legen.

Ein positiv und ein negativ inverses Punktpaar in Bezug auf denselben Inversionskreis können nie auf einem Kreise liegen.

Ist ein Kreis k positiv selbstinvers in Bezug auf einen Kreis i, so ist auch der Kreis i positiv selbstinvers in Bezug auf den Kreis k als Inversionskreis; oder anders ausgedrückt:

Ist der Kreis i ein positiver Inversionskreis zum Kreise k, so ist auch der Kreis k ein positiver Inversionskreis zum Kreise i als selbstinversen. Es sind daher positiver Inversionskreis und positiv selbstinverser Kreis vertauschbar.

Ist ein Kreis k negativ selbstinvers in Bezug auf einen Kreis i, so ist der Kreis i nicht negativ selbstinvers in Bezug auf den Kreis k als Inversionskreis; oder anders ausgedrückt:

Ist der Kreis i ein negativer Inversionskreis zum Kreise k, so ist der Kreis k kein negativer Inversionskreis zum Kreis i als selbstentsprechenden. Es sind daher negativer Inversionskreis und negativ selbstinverser Kreis nicht vertauschbar.

Jeder negativ selbstinverse Kreis geht durch positive Inversion in Bezug auf denselben Inversionskreis in den gleich grossen diametralen, also durch dieselben In-Inversionskreispunkte gehenden, negativ selbstinversen Kreis über.

Jeder positiv selbstinverse Kreis geht durch negative Inversion in Bezug auf denselben Inversionskreis in den gleichgrossen diametralen, also den Inversionskreis in den diametralen Punkten des letzteren schneidenden, positiv selbstinversen Kreis über.

Der französische Geometer Gaultier*) hat diesen Beziehungen zweier Kreise zu einander folgende Benennungen gegeben:

---

centrum sein, da ihre Mittelpunkte immer von I die Entfernung c haben. Ihre Schnittpunkte P_1 und P_2 sind folglich auch in Bezug auf I perspektivisch invers. Als ihre Potenz ergiebt sich leicht $p = c^2 - a^2$.

*) L. Gaultier, *Memoire sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions et une sphère déterminée par quatre conditions. Journal de l'école polytechnique. 1813. 16ème Cahier, Tome IX, pag. 131 et la notation pag. 132.*

1) *radical reciproque* = positiv invers (Inversionskreis).

2) *radical simple* = negativ invers (Inversionskreis).

3) *primitif reciproque* = positiv selbstinvers.

4) *primitif simple* = negativ selbstinvers.

Er bemerkt dazu: „*Les expressions ‚radical simple‘ et ‚primitif simple‘ indiquent qu' il n' y a qu' un des deux cercles qui soit radical ou primitif de l'autre; si nous eussions connu un mot qui signifiât ‚non reciproque‘; nous lui aurions donné la préférence*“. Da diese Beziehungen in der Folge oft vorkommen werden, so empfiehlt es sich, besondere Zeichen für dieselben einzuführen und zwar nur d r e i Zeichen, da wie schon erwähnt, bei Kreisen positiv invers und positiv selbstinvers vertauschbar sind.

12 1) und 2) ⊕ oder P = positiv invers (pos. Invers.-Kr.) bzw. pos. selbstinvers (pos. selbstinv. Kr.)

3) ⊖ oder N = negativ invers (neg. Inversionskr.)

4) ⌽ oder M = neg. selbstinvers (neg. selbstinv. Kr.)

Was die Buchstaben anlangt, so sind sie die Anfangsbuchstaben der Worte: 1) Positiv, 2) Negativ, 3) Plus, 4) Minus. Es ist darauf aufmerksam zu machen, dass G a u l t i e r a. a. O. dieselben Buchstaben, aber in anderer Weise, gebraucht und zwar: 1) und 2) M, 3) N, 4) P.

13 Mit Hilfe dieser Bezeichnung können zwei perspektivisch inverse Systeme übersichtlich dargestellt werden. Sind z. B. P_1 P_2 zwei inverse Punkte und R' R'' zwei diametrale Punkte des Inversionskreises J, so folgt für

positive Inversion:

$$\left.\begin{matrix}\Sigma_1\ (\infty\ P_1\ R'\ P_2\ J\ R'') \\ \Sigma_2\ (J\ P_2\ R'\ P_1\ \infty\ R'')\end{matrix}\right\}\ \oplus\ J$$

negative Inversion:

$$\left.\begin{matrix}\Sigma_1\ (\infty\ P_1\ R'\ J\ P_2\ R'') \\ \Sigma_2\ (J\ P_2\ R''\ \infty\ P_1\ R')\end{matrix}\right\}\ \ominus\ J$$

1 § 25. Es ist nötig, an dieser Stelle einige Bemerkungen über die Specialfälle der Inversion einzuschalten.

Wird die Potenz $p = o$, degenerirt also der Inversionskreis in einen P u n k t, so fällt für jeden Punkt der Ebene der inverse mit dem Inversionscentrum zusammen. Dieser Fall ist daher ohne Werth.

2 Für die Potenz $p = \infty$ wird der Inversionskreis zur I n v e r s i o n s g e r a d e n. Es sind hierbei zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Liegt das Inversionscentrum im Endlichen, mithin die Inversionsgerade im Unendlichen, so fällt für jeden Punkt der Ebene der inverse ebenfalls in's Unendliche. Dieser Fall ist also auch wertlos. Liegt das Inversionscentrum im Unendlichen, und mithin die Inversionsgerade im Endlichen, so ist die negative In-

version aus demselben Grunde wertlos; für die positive dagegen folgt aus § 24,4–5:

*In Bezug auf eine Inversionsgerade i sind je zwei Punkte P_1 und P_2 positiv invers, wenn sie symmetrisch sind in Bezug auf i als Symmetrieaxe.**)

Die Mittelpunkte aller selbstinversen Kreise liegen auf der Inversionsgeraden.

Jedes symmetrische Gebilde ist positiv selbstinvers in Bezug auf die Symmetrieaxe als Inversionsgerade.

§ 26. Die Gesamtheit aller Kreise, welche in Bezug auf einen, festgegebenen die nämliche Eigenschaft besitzen, sollen ein Kreisbündel genannt werden. Der gegebene Kreis heisse Ordnungskreis. Die Bündel solcher Kreise, welche einen gegebenen unter gleichen Winkeln schneiden, haben wenig Interesse, von Wichtigkeit dagegen sind die Bündel von Kreisen, welche in Bezug auf den Ordnungskreis positive oder negative Inversionskreise oder positiv oder negativ selbstinverse Kreise sind. Da bei positiver Inversion Inversionskreis und selbstinverser Kreis vertauschbar sind, so giebt es drei verschiedene Arten von Kreisbündeln, welche im Folgenden neben einander betrachtet werden sollen. Der Radius des Ordnungskreises sei k, der eines beliebigen Bündelkreises r und die Entfernung seines Mittelpunktes von dem des Ordnungskreises c.

II.	I.	III.
B⊖ oder $\mathbf{B}_N$	**B**⊕ oder $\mathbf{B}_P$	**B**⦶ oder $\mathbf{B}_M$
$(k^2 - r^2 - c^2 = o)$	$(k^2 + r^2 - c^2 = o)$	$(k^2 - r^2 + c^2 = o)$
Bündel der Kreise, welche in Bezug auf den Ordnungskreis	*Bündel der Kreise, welche in Bezug auf den Ordnungskreis*	*Bündel der Kreise, welche in Bezug auf den Ordnungskreis*

*) Dieser Specialfall führt auch den Namen „plane Spiegelung", da beim ebenen Spiegel entsprechende Gegenstands und Bildpunkte positiv invers zur Spiegelebene liegen.

<table>
<tr><td></td><td>negative Inversionskreise sind.</td><td>positive Inversionskreise oder positiv selbstinverse Kreise sind. (Orthogonalkreisbündel.)</td><td>negativ selbstinverse Kreise sind.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Die einzelnen Punkte des Ordnungskreises gehören zum Bündel.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Der Ordnungskreis als solcher gehört zum Bündel.</td><td></td><td>Der Ordnungskreis als solcher gehört zum Bündel.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Die einzelnen Punkte des Ordnungskreises sind die kleinsten Bündelkreise. Sie werden Punktkreise genannt.</td><td>Der Ordnungskreis ist der kleinste Bündelkreis.</td></tr>
<tr><td></td><td>Der Ordnungskreis ist der grösste Bündelkreis.</td><td colspan="2">Die durch das Centrum des Ordnungskreises gehenden Geraden sind die grössten Bündelkreise.</td></tr>
<tr><td></td><td>$k \mathrel{\overset{=}{>}} r \geqq 0$</td><td>$\infty \mathrel{\overset{=}{>}} r \geqq 0$</td><td>$\infty \mathrel{\overset{=}{>}} r \geqq k$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Das Bündel erstreckt sich nur über einen Teil der Ebene und zwar über die dem Ordnungskreis koncentrische Kreisfläche vom Radius $k\sqrt{2}$.</td><td colspan="2">Das Bündel erstreckt sich über die ganze Ebene.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Die Mittelpunkte der Bündelkreise erfüllen nur die Ordnungskreisebene und zwar einfach,</td><td>Die Mittelpunkte der Bündelkreise erfüllen nur die Ordnungskreisergänzungsebene und zwar einfach,</td><td>Die Mittelpunkte der Bündelkreise erfüllen die ganze Ebene und zwar einfach,</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">da nicht zwei Kreise des Bündels koncentrisch sein können.</td></tr>
<tr><td></td><td>$k \mathrel{\overset{=}{>}} c \geqq 0$</td><td>$\infty \mathrel{\overset{=}{>}} c \geqq k$</td><td>$\infty \mathrel{\overset{=}{>}} c \geqq 0$</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">Die Bündelkreise können alle Lagen zu einander einnehmen.</td><td>Jeder Bündelkreis schneidet alle übrigen.</td></tr>
<tr><td></td><td>Die Bündelkreise schliessen das Centrum ein oder aus.</td><td>Alle Bündelkreise schliessen das Centrum aus.</td><td>Alle Bündelkreise schliessen das Centrum ein.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Die Schnittpunkte</td><td>Die Schnittpunkte</td><td>Die Schnittpunkte</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>je zweier sind in Bezug auf den Ordnungskreis k e i n e inversen Punkte.</td><td>je zweier sind in Bezug auf den Ordnungskreis positiv inverse Punkte; daraus folgt:</td><td>je zweier sind in Bezug auf den Ordnungskreis negativ inverse Punkte; daraus folgt:</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Schnittpunkte können beide ausserhalb, oder innerhalb, oder einer ausserhalb (resp. auf), der andre innerhalb des Ordnungskreises liegen.</td><td colspan="2">Von den Schnittpunkten liegt stets einer ausserhalb, der andre innerhalb des Ordnungskreises, oder beide auf demselben.</td><td></td></tr>
<tr><td>Die äusserliche Berührung geschieht stets innerhalb, die die innerliche stets ausserhalb des Ordnungskreises; ist jedoch einer der Bündelkreise ein Punktkreis, so erfolgt sowohl die äusserliche als inner- Berührung a u f dem Ordnungskreise.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte zweier Bündelkreise geht im allgemeinen nicht durch den Mittelpunkt des Ordnungskreises.</td><td colspan="2">Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte oder die gemeinschaftliche Tangente zweier Bündelkreise geht stets durch den Mittelpunkt des Ordnungskreises (§ 24,5).</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Die Bündelkreise können den Ordnungskreis unter a l l e n Winkeln schneiden, und alle Kreise, welche den Ordnungskreis unter demselben Win-</td><td>Die Bündelkreise können den Ordnungskreis n u r unter r e c h t e n Winkeln schneiden.</td><td>Die Bündelkreise können den Ordnungskreis unter a l l e n Winkeln schneiden, und alle Kreise, welche den Ordnungskreis unter demselben Win-</td><td>9</td></tr>
</table>

kel schneiden, sind einander gleich.	kel schneiden, sind einander gleich.
Die Kreise, welche den Ordnungskreis rechtwinklig schneiden, fallen mit den Punkten d. Ordnungskreises zusammen.	Die Kreise, welche den Ordnungskreis rechtwinklig schneiden, sind die durch das Centrum gehenden Geraden.
Die Kreise, welche den Ordnungskreis unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ schneiden, gehen durch das Centrum und werden von dem Kreis, welcher das Bündel begrenzt, umhüllt.	Die Kreise, welche den Ordnungskreis unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ schneiden, haben ihre Mittelpunkte auf der Peripherie des Ordnungskreises.
Die Kreise, welche den Ordnungskreis unter dem Winkel o^0 schneiden, fallen mit ihm zusammen.	Die Kreise, welche den Ordnungskreis unter dem Winkel o^0 schneiden, fallen mit ihm zusammen.

10 *Zwei Kreisbündel derselben Art sind perspektivisch ähnliche centrische Gebilde in Bezug auf die beiden Aehnlichkeitspunkte ihrer Ordnungskreise.*

11 Es erübrigt noch, die Specialfälle der Kreisbündel für $k = o$ und $k = \infty$ zu betrachten:

B⊖ oder $\mathbf{B}_N$ ($k = o$)	**B**⊕ oder $\mathbf{B}_P$ = **B**⊖ oder $\mathbf{B}_N$ ($k = o$)
In Bezug auf einen Ordnungskreis vom Radius $k = o$ fällt das Bündel negativer Inversionskreise mit dem Centrum zusammen. (Es ist daher ohne Wert).	In Bezug auf einen Ordnungskreis vom Radius $k = o$ ist das Bündel positiver Inversions- oder positiv selbstinverser Kreise und das Bündel negativ selbstinverser Kreise identisch und besteht aus allen durch das Centrum gehenden Kreisen und Geraden. Das Centrum gehört zum Bündel.

B⊖ oder $\mathbf{B_N}$ = B⊕ oder $\mathbf{B_P}$
($k = \infty$, Centrum unendlich fern.)

In Bezug auf einen Ordnungskreis vom Radius $k = \infty$ ist das Bündel negativer Inversionskreise und das Bündel positiver Inversions- oder positiv selbstinverser Kreise identisch, und besteht aus allen Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Ordnungsgeraden liegen und aus allen Geraden, welche dieselbe rechtwinklig schneiden. Bündelkreise können koncentrisch sein. Die Punkte der Ordnungsgeraden sind ebenfalls Bündelkreise.

12 **B⊖ oder $\mathbf{B_M}$**
($k = \infty$, Centr. u. fern.)

In Bezug auf einen Ordnungskreis vom Radius $k = \infty$ besteht das Bündel nur aus Geraden und zwar sämmtlichen Geraden der Ebene. (Es ist daher ohne Wert).

1 § 27. *Zwei perspektivisch inverse Systeme sind konform und zwar gegenwendig konform, d. h. in den kleinsten Teilen gegenwendig ähnlich.* Jedem unendlich kleinen, von drei unendlich nahen Punkten A_1 B_1 C_1 gebildeten Dreiecke ist, wenn die drei Punkte endliche Entfernung von dem Inversionscentrum haben, wieder ein unendlich kleines Dreieck perspektivisch invers, nämlich dasjenige, welches von den drei perspektivisch inversen Punkten gebildet wird. Da nun nach § 24,4 durch je zwei (also auch) unendlich naheliegende perspektiv. inverse Punktpaare ein perspektivisch selbstinverser Kreis gelegt werden kann, und sich je zwei von den so resultierenden drei selbstinversen Kreisen in ihren beiden Schnittpunkten unter demselben Winkel schneiden, so folgt daraus die Aehnlichkeit der beiden unendlich kleinen Dreiecke, mithin auch die Konformität der perspektivisch inversen Systeme. Da ferner die unendlich kleinen Dreiecke nach § 23,2 in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden, so sind perspektivisch inverse Systeme gegenwendig konform.

2 *Schneiden sich zwei Kurven, so schneiden sich ihre perspektivisch inversen Kurven in den perspektivisch inversen Punkten unter denselben resp. Winkeln.*

3 *Berühren sich zwei Kurven, so berühren sich ihre perspektivisch inversen Kurven in dem perspektivisch inversen Punkte.*

4 *Die Tangenten- resp. Normalen, welche je zwei entsprechenden Kurvenpunkten zweier perspektivisch inversen Kurven oder einer perspektivisch selbstinversen Kurve zugehören, schliessen mit dem Radiusvektor entgegengesetzt gleiche Winkel ein, und es sind daher die Tangenten, resp. Normalenstücke von ihrem Schnittpunkte bis*

zu den zugehörigen Kurvenpunkten einander gleich. Je zwei perspektivisch inverse Kurvenpunkte liegen mit den Schnittpunkten ihrer beiden Tangenten und Normalen auf einem perspektivisch selbstinversen Kreise.

Werden um den Tangenten- und Normalenschnittpunkt zweier perspektivisch inversen Punkte Kreise durch das inverse Punktpaar gelegt, so folgt: *Zwei perspektivisch inverse Kurven werden in jedem entsprechenden Punktpaar von je einem selbstinversen Kreise rechtwinklig geschnitten und berührt.* Zwei perspektivisch inverse Kurven können als Enveloppen perspektivisch selbstinverser Kreise aufgefasst werden.

Daraus folgt leicht: *Zwei perspektivisch inverse Kurvenpaare werden von einem perspektivisch selbstinversen Kreise berührt.*

§ 28. *Jeder Geraden g_1 ist ein Kreis k_2 perspekt. invers, welcher durch das Inversionscentrum geht und dessen Mittelpunkt auf dem durch das Inversionscentrum gehenden Lot zur inversen Geraden liegt, und umgekehrt.**) Denn bezeichnet A_1 den Fusspunkt dieses Lotes, B_1 einen beliebigen Punkt der Geraden g_1, ferner A_2 und B_2 die perspekt. inversen Punkte, so ist nach § 20,1 Winkel $IB_2\,A_2 = IA_1\;B_1 = \frac{\pi}{2}$, also konstant, wenn der Punkt B_1 die Gerade durchläuft.

Dem Mittelpunkte des einer Geraden perspektivisch inversen Kreises ist derjenige Punkt des Lotes perspektivisch invers, welcher doppelt so weit als die Gerade vom Inversionscentrum entfernt ist und mit der Geraden auf der nämlichen Seite desselben liegt.

---

*) Unter Beachtung dieses Satzes kann ein Inversor zu einem Mechanismus für „exakte“ Geradführung umgestaltet werden, d. h. zu einem Mechanismus, welcher eine Bewegung im Kreise in eine geradlinige verwandelt, oder umgekehrt. Wird beim Peaucellier'schen Inversor (§ 21,2) von den beiden Punkten P_1 und P_2 der eine, P_2 mit einem festen Punkte M durch ein drehbares Glied verbunden, dessen Länge (b) gleich der Entfernung der beiden festen Punkte M und I ist, so kann P_2 nur auf dem Bogen eines Kreises sich bewegen, der durch I geht. Der Punkt P_1 wird daher auf einer Geraden geführt, welche auf der Verbindungsstrecke IM der beiden Fixpunkte senkrecht steht. Da diese Peaucellier'sche „exakte“ Geradführung jedoch nicht so einfach ist wie verschiedene „angenäherte“ Geradführungen, und da letztere in der Praxis gewöhnlich genügen, so hat erstere nicht so mannigfache Anwendungen in der Maschinentechnik erfahren, wie anfänglich erwartet wurde.

Schneidet die Gerade den Inversionskreis, so geht der positiv inverse Kreis durch die Schnittpunkte, und umgekehrt. Berührt die Gerade den Inversionskreis, so berührt der positiv inverse Kreis denselben in dem nämlichen Punkte innerlich, und umgekehrt.

Schneidet die Gerade den Inversionskreis, so geht der negativ inverse Kreis durch die diametralen Punkte des Inversionskreises. Berührt die Gerade den Inversionskreis, so berührt der negativ inverse Kreis denselben in dem diametralen Punkte des Inversionskreises innerlich, und umgekehrt.

Eine Gerade und ihr positiv inverser Kreis können sich daher ausschliessen, berühren oder schneiden.

Eine Gerade und ihr negativ inverser Kreis können sich daher nie berühren oder schneiden.

Der unendlich fernen Geraden ist das Inversionscentrum perspektivisch invers.

Der Verbindungsgeraden zweier Punkte ist der Kreis perspekt. invers, welcher durch die perspekt. inversen Punkte und das Inversionscentrum geht. Der Tangente eines Kurvenpunktes ist der im perspektivisch inversen Punkte die Kurve berührende und durch das Inversionscentrum gehende Kreis perspektivisch invers.

§ 29. *Jedem Kreise* k_1 *ist wieder ein Kreis* k_2 *perspektivisch invers, dessen Mittelpunkt mit dem des ersteren und dem Inversionscentrum* I *in einer Geraden liegt. Das Inversionscentrum ist ein Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Befindet sich das Inversionscentrum ausserhalb des Kreises* k_1*, so sind die vom Inversionscentrum an denselben gezogenen Tangenten zugleich Tangenten des perspektivisch inversen Kreises* k_2*, also beiden gemeinschaftlich. Die Mittelpunkte der beiden Kreise sind keine perspektivisch inversen Punkte.*

Wird durch den Mittelpunkt des Kreises k_1 und das Inversionscentrum I eine Sekante gelegt, und sind A_2, B_2 und C_2 die perspektivisch inversen Punkte zu den Schnittpunkten A_1 und B_1 der Sekante mit dem Kreis k_1 und dem beliebigen Punkte C_1 desselben, so ist nach § 20,1 leicht zu beweisen, dass Winkel $A_2\,C_2\,B_2 = 90^0$ ist, der Punkt C_2 also auf einem Kreise k_2 sich bewegt.

Wird der zweite Schnittpunkt von IC_1 mit dem Kreise k_1 mit C'_1 bezeichnet, so ergiebt sich ebenso einfach, dass z. B. $A_2\,C_2$ parallel $B_1\,C'_1$ läuft, die Kreise also in Bezug auf I perspektivisch ähnlich sind.

Das Inversionscentrum ist ein äusserer resp. innerer Aehnlichkeitspunkt zweier positiv inversen Kreise, u. ihre Mittelpunkte liegen auf derselben Seite resp. auf verschiedenen Seiten des Inversionscentrums, je nachdem dasselbe ausserhalb oder innerhalb der Kreise sich befindet.

Schneidet der Kreis k_1 den Inversionskreis, so geht der positiv inverse k_2 durch die Schnittpunkte. Dies gilt für alle positiv inversen Kurven.

Berührt k_1 den Inversionskreis äusserlich, so berührt k_2 denselben in dem nämlichen Punkte innerlich.

Das Inversionscentrum ist ein innerer resp. äusserer Aehnlichkeitspunkt zweier negativ inversen Kreise, u. ihre Mittelpunkte liegen auf verschiedenen Seiten resp. auf derselben Seite des Inversionscentrums, je nachdem dasselbe ausserhalb oder innerhalb der Kreise sich befindet.

Schneidet der Kreis k_1 den Inversionskreis, so geht der negativ inverse k_2 durch die diametralen Punkte des Inversionskreises.

Berührt k_1 den Inversionskreis äusserlich, so berührt k_2 denselben in dem diametralen Punkte innerlich.

Einem Kreise, welcher durch zwei Punkte geht, ist der Kreis perspektivisch invers, welcher durch die entsprechenden Punkte geht und dessen Mittelpunkt mit dem des ersteren auf einer durch das Inversionscentrum gehenden Geraden liegt.

Dem Kreise, welcher durch drei Punkte geht, ist der Kreis perspektiv. invers, welcher durch die drei perspektiv. inversen Punkte geht.

Sind die drei Punkte, drei unendlich nahe Punkte einer Kurve, der durch sie gelegte Kreis also ein Krümmungskreis, so folgt: *Dem Krümmungskreise eines gegebenen Kurvenpunktes ist der Krümmungskreis des perspektiv. inversen Kurvenpunktes perspektiv. invers.*

Geht der Krümmungskreis durch das Inversionscentrum, so entspricht demselben eine Wendetangente der perspektivisch inversen Kurve.

§ 30. Da zwei Kreisen zwei Aehnlichkeitspunkte zugehören, so haben sie also nach § 29,1 zwei Inversionscentra.

Zwei ausserhalb einander liegende Kreise sind in Bezug auf

den äusseren Aehnlichkeitspunkt positiv invers. | den inneren Aehnlichkeitspunkt negativ invers.

Zwei innerhalb einander liegende Kreise sind in Bezug auf

den inneren Aehnlichkeitspunkt positiv invers. | den äusseren Aehnlichkeitspunkt negativ invers.

Zwei sich schneidende Kreise sind in Bezug auf jeden der beiden Aehnlichkeitspunkte positiv invers.

Der positive Inversionskreis zweier sich nicht schneidenden Kreise ist negativ selbstinvers in Bezug auf den negativen Inversionskreis beider Kreise. Die beiden positiven Inversionskreise zweier sich schneidenden Kreise sind rechtwinklig. Dies leuchtet sofort ein, da die beiden Kreise nebst einem positiven Inversionskreis in Bezug auf ihren negativen resp. ihren andern positiven Inversionskreis in einander übergehen.

§ 31. Jeder in Bezug auf den äusseren resp. inneren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise perspektivisch selbstinverse Kreis wird von denselben gleichartig resp. ungleichartig berührt oder unter demselben Winkel geschnitten, und umgekehrt. *Jeder zwei Kreise rechtwinklig schneidende Kreis ist perspektivisch selbstinvers in Bezug auf jedes der beiden Inversionscentra derselben.*

Zwei perspektivisch inverse Kreispaare können im allgemeinen von vier perspektivisch selbstinversen Kreisen unter einem vorgeschriebenen Winkel geschnitten oder berührt werden. (§ 27,6.)

Alle Kreise P, welche zwei sich nicht schneidende Kreise k rechtwinklig schneiden, gehen durch zwei Punkte ihrer Centrale; ihre Mittelpunkte liegen daher auf einer Geraden, der Potenzaxe der beiden Kreise k.

Die Mittelpunkte aller Kreise P, welche zu zwei sich schneidenden Kreisen k rechtwinklig sind, liegen auf der durch die beiden Schnittpunkte gehenden Potenzaxe.

Die Mittelpunkte aller Kreise P, welche zwei sich berührende Kreise rechtwinklig schneiden, liegen auf der Tangente des Berührungspunktes.

Da der Schnittpunkt der Potenzaxe und je ein Inversionscentrum perspektivisch invers sind in Bezug auf das andre Inversionscentrum, so folgt: *Die Potenzaxe und der Aehnlichkeitskreis zweier Kreise sind perspektivisch invers in Bezug auf jedes der beiden Inversionscentra.*

Die Mittelpunkte der Inversionskreise, in Bezug auf welche zwei Kreise k selbstinvers sind, liegen auf der Potenzaxe der beiden Kreise.

§ 32. Das Princip der Inversion ist sehr geeignet, aus bekannten Sätzen neue zu gewinnen, namentlich sind es die Sätze der §§ 24, 28, 29, welche dabei zur Anwendung kommen. Das in denselben enthaltene „Uebertragungsprincip“ ist schon von Plücker*) mit den Worten ausgesprochen worden:

„Alle Sätze, welche auf eine beliebige Zusammenstellung von beliebigen Kreisen mit geraden Linien oder von geraden Linien unter sich Bezug haben und blose Situations- und Winkelbeziehungen enthalten, lassen sich unmittelbar (durch Inversion) *auf eine Zusammenstellung von beliebigen Kreisen mit solchen Kreisen, die alle durch einen festen Punkt gehen oder von letztbezeichneten Kreisen unter sich übertragen*“, und umgekehrt.

§ 33. Ferner lassen sich oft den zu beweisenden Sätzen und zu lösenden Aufgaben Formen geben, in welchen sie durch Uebertragung mittelst der Inversion auf bekannte Sätze oder gelöste Aufgaben sich zurückführen lassen. Es mögen einige Beispiele folgen:

Werden in einem (konvexen, konkaven oder überschlagenen) Viereck ABCD, dessen Diagonalen sich rechtwinklig schneiden, von ihrem Schnittpunkte O aus Gerade gezogen, welche die Seiten unter gleichen Winkeln in den Punkten $A_1B_1C_1D_1$ *schneiden — jedoch so, dass die von diesen Geraden und den ebenfalls von O auf die Seiten gefällten Loten mit den Seiten gebildeten Dreiecke gleichwendig ähnlich sind — so liegen die Punkte* $A_1B_1C_1D_1$ *auf einem Kreise***).

Da, wie leicht nachzuweisen, je vier Punkte OD_1AA_1, OA_1BB_1, OB_1CC_1, OC_1DD_1 auf einem Kreise liegen, und je zwei dieser Kreise, welche durch einen der Punkte $A_1B_1C_1D_1$ gehen, sich rechtwinklig schneiden, so kann obiger Satz auch in der Form ausgesprochen werden: *Befinden sich die Mittelpunkte von vier durch einen Punkt O gehenden Kreisen a, b, c, d paarweise auf zwei in diesem Punkte sich rechtwinklig schneidenden Geraden, so liegen ihre vier andern Schnittpunkte* $A_1B_1C_1D_1$ *auf einem Kreise.* Durch In-

*) Plücker, Analytisch geometrische Aphorismen. V. 1834. Crelle's Journal, Bd. 11, p. 219.

**) Ein specieller Fall von diesem Satze und der analoge für den Raum rührt von J. Steiner her. Vergleiche: „Geometrische Lehrsätze und Aufgaben“ in Crelle's Journal, Bd. XXXI, pag. 91 oder Ges. Werke, Bd. II, pag. 356.

version in Bezug auf O als Inversionscentrum gehen die vier sich paarweise in $A_1B_1C_1D_1$ rechtwinklig schneidenden Kreise a, b, c, d in vier Gerade $a'b'c'd'$ über, welche sich in den inversen Punkten $A'_1B'_1C'_1D'_1$ *ebenfalls rechtwinklig* schneiden. Da sich nun durch diese vier Punkte, welche mithin ein Rechteck bilden, stets ein Kreis legen lässt, und die Inverse eines Kreises im allgemeinen wieder ein Kreis ist, so liegen also auch die Punkte $A_1B_1C_1D_1$ auf einem Kreise.

Als zweites Beispiel folge die Lösung eines Problems, mit dem ein arabischer Mathemathiker *Abû Alî al Hasan îbn al Hasan îbn Alhaitam* aus *Al-Basra* († 1038) sich zuerst beschäftigt hat. Diese Aufgabe, kurz die Alhazen'sche genannt, lautet: *Auf einem sphärischen Konkav- oder Konvexspiegel, wenn Gegenstand und Auge der Lage nach gegeben sind, die Reflexionspunkte zu finden,* d. h. diejenigen Punkte, welche die von dem Gegenstande ausgehenden Lichtstrahlen in das Auge zurückwerfen*).

Ist J das Centrum des sphärischen Spiegels, G_1 der Lichtpunkt und A_1 das Auge, so liegen die Reflexionspunkte R in der durch jene drei bestimmten Ebene, und zwar so, dass Winkel $G_1RJ = JRA_1 = \alpha$ ist. Alle Punkte R_1 nun, welche dieser Bedingung genügen, beschreiben eine vorläufig unbekannte Kurve, deren Schnittpunkte R mit dem Spiegelkreis i die gesuchten sind. Werden um JG_1R_1 und JA_1R_1 die Kreise g_1 und a_1 beschrieben, so entsprechen denselben in Bezug auf i als Inversionskreis zwei Gerade g_2 und a_2, welche durch die zu G_1 und A_1 positiv inversen Punkte G_2 und A_2 gehen und mit G_2J resp. A_2J die gleichen Winkel α einschliessen. Der zu R_1 positiv inverse Punkt R_2 ist also der Schnittpunkt zweier durch die festen Punkte G_2 und A_2 gehenden Geraden, welche immer mit den durch J gehenden gleiche Winkel einschliessen. Der Punkt R_2 beschreibt daher bekanntlich eine gleichseitige Hyperbel, welche durch den Spiegelmittelpunkt J geht**). Ihre vier Schnittpunkte R mit dem Spiegel sind die gesuchten Punkte,

---

*) Dr. P. Bode giebt in den Berichten des Freien Deutschen Hochstiftes zu Frankfurt a. M., 1885/86, Heft 3 u. 4. p. 296 nach einem geschichtlichen Ueberblick eine analytische Lösung.

**) Ihre Axen sind leicht zu ermitteln, doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden, da wir später bei allgemeineren Untersuchungen auf diesen Fall zurückkommen.

„es sind jedoch nur zwei davon wirklich reflektierende Punkte; bei den beiden andern halbiert das Einfallslot JR nicht den Winkel zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl, sondern den Nebenwinkel.“

1 § 34. Für positiv inverse Systeme gilt folgender wichtige Satz: *Sind zwei Systeme Σ_1 und Σ_2 positiv invers in Bezug auf einen Kreis k und werden in Bezug auf einen beliebigen Inversionskreis i die perspektivisch inversen Systeme Σ'_1 Σ'_2 k' ermittelt, so sind auch Σ'_1 und Σ'_2 in Bezug auf k' positiv inverse Systeme*).*

Es ist nur nötig, diesen Satz für ein entsprechendes Punktpaar P_1 und P_2 der beiden positiv inversen Systeme Σ_1 und Σ_2 zu beweisen. Werden zum Kreise k und zu den beiden in Bezug auf denselben positiv inversen Punkten P_1 und P_2 die in Bezug auf den Kreis i perspektivisch inversen Gebilde: der Kreis k' und die Punkte P'_1 und P'_2 konstruiert, so liegen die vier Punkte P_1 P_2 P'_1 P'_2 auf einem in Bezug auf i perspektivisch selbstinversen Kreise r (§ 24,7), welcher den Kreis k (§ 24,1) und also ebenfalls den Kreis k' (§ 29,2) rechtwinklig schneidet, mithin in Bezug auf k' positiv selbstinvers ist. Da nun ferner (§ 28,1) der Geraden g, welche durch P_1, P_2 geht und mithin den Kreis k rechtwinklig schneidet, ein durch P'_1 P'_2 und das Inversionscentrum I gehender Kreis g' perspektivisch invers ist, welcher den Kreis k' rechtwinklig durchschneidet, also positiv selbstinvers in Bezug auf denselben ist, so sind die beiden Punkte P'_1 P'_2 als Schnittpunkte zwei positiv inverse Punkte.

2 Es fragt sich, ob obiger Satz auch Giltigkeit hat bei Uebertragung von negativ inversen Systemen durch perspektivische Inversion. Bedeuten Q_1 und Q_2 zwei negativ inverse Punkte in Bezug auf den Kreis k, und werden wieder in Bezug auf i die perspektivisch inversen Gebilde Q'_1 Q'_2 k' ermittelt, so liegen dieselben wieder auf einem Kreis q, welcher in Bezug auf i perpektivisch selbstinvers ist. Derselbe geht als negativ selbstinverser Kreis zu k durch diametrale Punkte des letzteren. Es ist nun leicht ersichtlich, dass q im allgemeinen nicht auch durch diametrale Punkte von k' gehen kann, denn bezeichnen S_1 und S_2 die Schnittpunkte von q mit k', so ist der Geraden S_1 K S_2 (K bedeutet den Mittelpunkt des Kreises k) ein durch S'_1 S'_2 und das Inversionscentrum I

*) Prof. Dr. C. Neumann, Mathem. Seminar, 1878. Universität Leipzig.

gehender Kreis perspektivisch invers, welcher den Kreis k' rechtwinklig schneidet, sodass der Mittelpunkt K' des Kreises k' ausserhalb des durch S'_1 S'_2 I bestimmten Kreises liegt. Es kann daher die Verbindungsgerade von S'_1 S'_2 nicht durch den Mittelpunkt von k' gehen. Die Punkte Q'_1 Q'_2 liegen daher auf einem Kreise, welcher **nicht** durch diametrale Punkte von k' geht, sie können folglich keine negativ inversen Punkte in Bezug auf k' sein. — Es könnte noch sein, dass sie positiv invers wären, aber auch das ist nicht möglich, denn q schneidet den Kreis k in diametralen Punkten, folglich im allgemeinen nicht rechtwinklig und mithin k' auch nicht rechtwinklig, was der Fall sein müsste, wenn Q'_1 Q'_2 in Bezug auf k' positiv invers sein sollten.

Für negativ inverse Systeme gilt nur der folgende Specialsatz: *Sind zwei Systeme Σ_1 und Σ_2 negativ invers in Bezug auf einen Kreis k und werden in Bezug auf einen beliebigen, jedoch zu k koncentrischen Inversionskreis i die perspektivisch inversen Systeme Σ'_1 Σ'_2 k' ermittelt, so sind auch Σ'_1 und Σ'_2 in Bezug auf k' negativ inverse Systeme.*

Handelt es sich nicht um beliebige Gebilde, sondern nur um die negativ selbstinversen Kreise r in Bezug auf einen Kreis k, welche durch dieselben diametralen Punkte $P_1 P_2$ des letzteren gehen, und werden die in Bezug auf einen Inversionskreis i, dessen Centrum auf der Geraden $P_1 P_2$ liegt, die perspektiv. inversen Kreise r und k ermittelt, so sind die Kreise r negativ selbstinvers in Bezug auf k'.

§ 35. Zwei perspektivisch inverse Kurven bilden, als eine einzige betrachtet, eine selbstinverse. Es giebt nun Kurven, welche in Bezug auf mehrere Punkte perspektivisch selbstinvers sind. Werden z. B. zwei Kreise als eine selbstinverse Kurve vierter Ordnung aufgefasst, so ist dieselbe, ausser in Bezug auf die Aehnlichkeitspunkte der Kreise, noch in Bezug auf den Punkt ihrer Centrale selbstinvers, in welchem die Centrale von der Potenzaxe geschnitten wird. Ihre drei Inversionskreise, von denen stets zwei positiv und einer negativ ist, schneiden sich in zwei diametralen Punkten des letzteren. Die drei nach einem Schnittpunkt gezogenen Radien der Inversionskreise bilden daher Katheten und Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks*).

*) An dieser Stelle derartige Kurven näher zu untersuchen, gestattet der Raum nicht. Es sei nur vorläufig bemerkt, dass die sogenannten

2 Ein System von vier Punkten P_1 P_2 P_3 P_4 einer Geraden und die 6 Kreise, welche je zwei der Punkte zu Endpunkten eines Durchmessers haben, können in Bezug auf 3 Inversionscentra als ein perspektivisch selbstinverses Gebilde aufgefasst werden. Werden wie in § 17 die Kreise (nicht Kreismittelpunkte) mit c, die Punkte P der Kürze wegen nur durch ihre Indices, die Inversionscentra mit J und die Potenzen mit p bezeichnet, so lassen sich die perspektivisch selbstinversen Systeme wie folgt übersichtlich darstellen:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & c'_1\, c''_1 \\ 2 & 4 & c'_2\, c''_2 \end{matrix} \; c_1 \quad c_2 \quad \left.\begin{matrix} J' \\ J'' \end{matrix}\right\} \oplus J;\; p = +\,(r)^2$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & c_1\, c''_1 \\ 3 & 4 & c_2\, c''_2 \end{matrix} \; c'_1 \quad c'_2 \quad \left.\begin{matrix} J \\ J'' \end{matrix}\right\} \ominus J';\; p' = -\,(r')^2$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & c_1\, c'_1 \\ 4 & 3 & c_2\, c'_2 \end{matrix} \; c''_1 \quad c''_2 \quad \left.\begin{matrix} J \\ J' \end{matrix}\right\} \oplus J'';\; p'' = +\,(r'')^2$$

3 Da die Radien r und r'' der drei Inversionskreise die Katheten und r' die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist, so folgt, wenn die Fläche desselben zweimal durch diese Grössen ausgedrückt wird:

$$r\, r'' = r' \sqrt{(r)^2 + (r'')^2}$$

Wird diese Gleichung durch das Produkt der drei Radien dividiert und quadiert, so resultiert

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{r'}\right)^2 + \left(\frac{1}{r''}\right)^2 = 0,$$

und es findet also zwischen den drei Potenzen die elegante Beziehung statt:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} = 0$$

1 § 36. Zum Schluss mögen noch einige Bemerkungen über die allgemeine Gleichung perspektivisch selbstinverser Kurven folgen.

Eine perspektivisch selbstinverse Kurve wird von jedem Inversionsstrahl in einer geraden Anzahl von Punkten geschnitten. Ihre Gleichung in Polarkoordinaten (r, φ) ist daher, für das Inversionscentrum als Pol, in Bezug auf r im allgemeinen vom $2n$ ten Grade. *Bedeutet $F(\varphi)$ eine beliebige Funktion von φ und $p = \pm k^2$ die Potenz des Inversionskreises, so stellt die Relation*

$$r^2 - r\, F(\varphi) + p = 0$$

Cartesischen Ovale, welche später eingehend behandelt werden, in Bezug auf ihre drei Brennpunkte perspektivisch selbstinvers sind.

die Gleichung einer perspektivisch selbstinversen Kurve dar, die in Bezug auf r vom zweiten Grade ist. Denn sind r_1 und r_2 für einen beliebigen Wert von $F(\varphi)$ die beiden Wurzeln der Gleichung, so erfüllen dieselben die inverse Beziehung $r_1 \,.\, r_2 = p$. Ist die selbstinverse Kurve vom $2n$ ten Grade in Bezug auf r, so zerfällt die Gleichung derselben in n Gleichungen von vorstehender Form.

Ist $F(\varphi) = f_1(\varphi) + f_2(\varphi)$ und $f_1(\varphi) \cdot f_2(\varphi) = p$, lässt sich also die Funktion $F(\varphi)$ in die Summe zweier Funktionen $f_1(\varphi)$ und $f_2(\varphi)$ zerlegen, deren Produkt gleich der Potenz p, also konstant ist, so zerfällt die perspektivisch selbstinverse Kurve in die beiden inversen Kurven:

$$r = f_1(\varphi) \qquad \textit{und} \qquad r = f_2(\varphi)$$

Z. B. liefert die Gleichung der selbstinversen Kurve

$$r_2 - \frac{a(1 + \varphi^2)}{\varphi}\, r + a^2 = 0$$

die beiden

$$r = a\,\varphi \qquad \text{und} \qquad r = \frac{a}{\varphi},$$

die selbstinverse Kurve zerfällt also in eine *Archimedische* und ihre inverse *hyperbolische Spirale.*

Es kann nun der Fall eintreten, dass obige beiden Kurven gegenwendig ähnlich oder symmetrisch sind. Es muss dann, wenn μ_{12} und ε konstante Grössen sind,

$$f_2(\varphi) = \mu_{12}\; f_1(\varepsilon - \varphi)$$

sein.

Z. B. ergiebt die Gleichung der selbstinversen Kurve

$$r^2 - a\,(e^{m\varphi} + e^{-m\varphi}) + a_2 = 0$$

$$r = a\, e^{m\varphi} \qquad \text{und} \qquad r = a\, e^{-m\varphi}.$$

Es sind also zwei gegenwendige gleichwinklige logarithmische Spiralen (§ 5) perspektivisch invers in Bezug auf ihren asymptotischen Punkt.

Bemerkte Druckfehler.

Auf Seite 37 und 38 dritte Spalte muss es heissen **B** ⦶ oder $\mathbf{B}_M$ statt **B**⊖ oder $\mathbf{B}_N$.

Auf Seite 40 muss die Randzahl 2 um sechs Zeilen höher stehen.

Druck von Julius Booch & Co., Werdau.

Vorbemerkung.

Vorliegende Abhandlung bildet die Fortsetzung des Programms No. 548 vom Jahre 1888; sie schliesst jedoch nicht an das Ende, sondern schon an Seite 40 desselben an. Der auf den übrigen acht Seiten dort noch enthaltene Stoff ist des Zusammenhanges wegen teils in andrer Anordnung, teils in sehr erweiterter Form hier wieder aufgenommen worden. Letzteres gilt besonders von den selbstinversen Kurven. Von den als Enveloppen der Kreisbüschel auftretenden Cartesischen Ovalen konnten aus Raummangel nur wenige Sätze, (z. T. ohne Beweis) mitgeteilt werden. Ich behalte mir deshalb vor, über diese interessanten Kurven und besonders ihre Büschel in einer besonderen Abhandlung ausführlich zu berichten.

II.
Die Inversion (Fortsetzung).

Zum besseren Verständnis der vorliegenden Abhandlung ist es nötig, derselben einige Erklärungen und Sätze des Programms vom Jahre 1888 vorauszuschicken:

Zwei perspektivisch inverse Gebilde sollen positiv oder negativ invers genannt werden, je nachdem die Potenz positiv oder negativ ist, und also die Radienvektoren gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sind. Für die inversen Beziehungen mögen die folgenden Zeichen in Anwendung kommen:

1) $\ominus$ oder $P =$ positiv invers (pos. Invers.-Kreis)

2) $\ominus$ oder $N =$ negativ invers (neg. Invers.-Kreis),

3) $\oplus$ oder $P =$ pos. selbstinvers (pos. selbstinv. Kr.).

4) ⌽ oder $M =$ neg. selbstinvers (neg. selbstinv. Kr.).

Was die Buchstaben anlangt, so sind sie die Anfangsbuchstaben der Worte: 1) Positiv, 2) Negativ, 3) Plus, 4) Minus.

Aus §§ 24 und 28 sei bemerkt:

Jeder durch zwei positiv inverse Punkte gelegte Kreis ist in Bezug auf den Inversionskreis positiv selbstinvers.

Jeder den Inversionskreis rechtwinklig schneidende Kreis ist in Bezug auf denselben positiv selbstinvers u. umgekehrt.

Durch je zwei positiv inverse Punktpaare lässt sich stets ein in Bezug auf ihren Inversionskreis positiv selbstinverser Kreis legen.

Jeder durch zwei negativ inverse Punkte gelegte Kreis ist in Bezug auf den Inversionskreis negativ selbstinvers.

Jeder den Inversionskreis im Durchmesser des letzteren schneidende Kreis ist negativ selbstinvers und umgekehrt.

Durch je zwei negativ inverse Punktpaare lässt sich stets ein in Bezug auf ihren Inversionskreis negativ selbstinverser Kreis legen.

Jeder Geraden g_1 ist ein Kreis k_2 perspekt. invers, welcher durch das Inversionscentrum geht, und dessen Mittelpunkt auf dem durch das Inversionscentrum gehenden Lot zur inversen Geraden liegt, und umgekehrt.

---

§ 29. Jedem Kreise k_1 ist wieder ein Kreis k_2 perspektivisch invers, dessen Mittelpunkt mit dem des ersteren und dem Inversionscentrum J in einer Geraden liegt. 1

Die Mittelpunkte der beiden Kreise sind keine perspektivisch inversen Punkte.

Das Inversionscentrum ist ein Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Befindet sich das Inversionscentrum ausserhalb des Kreises k_1, so sind also die vom Inversionscentrum an denselben gezogenen Tangenten zugleich Tangenten des perspektivisch inversen Kreises k_2, also beiden gemeinschaftlich. 2

3 Die Mittelpunkte K_1 und K_2 der in Bezug auf J inversen Kreise k_1 und k_2 sind, wie oben erwähnt, keine inversen Punkte, sondern *dem Mittelpunkt K_1 (K_2) des einen Kreises k_1 (k_2) entspricht der positiv inverse Punkt K_2' (K_1') von J in Bezug auf den andern Kreis k_2 (k_1) als Inversionskreis,* denn zwei Durchmessern von k_1 (k_2) entsprechen nach § 24,5 und § 27,2 zwei durch J gehende und k_2 (k_1) rechtwinklig schneidende Kreise.

In Zeichen: Ist

$$\left.\begin{matrix} J \\ K_1' \end{matrix}\right\} \oplus k_1 \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} J \\ K_2' \end{matrix}\right\} \oplus k_2 ,$$

so folgt

$$\left.\begin{matrix} k_1 & K_1 & K_1' \\ k_2 & K_2' & K_2 \end{matrix}\right\} \oplus J.$$

4 Das Inversionscentrum ist ein äusserer resp. innerer Aehnlichkeitspunkt zweier positiv inversen Kreise k_1 und k_2, und ihre Mittelpunkte liegen auf derselben Seite resp. auf verschiedenen Seiten des Inversionscentrums, je nachdem dasselbe ausserhalb oder innerhalb der Kreise sich befindet.

5 Schneidet der Kreis k_1 den Inversionskreis, so geht der positiv inverse k_2 durch die Schnittpunkte.

Berührt k_1 den Inversionskreis, so berührt k_2 denselben in dem nämlichen Punkte.

so folgt

$$\left.\begin{matrix} k_1 & K_1 & K_1' \\ k_2 & K_2' & K_2 \end{matrix}\right\} \ominus J.$$

Das Inversionscentrum ist ein innerer resp. äusserer Aehnlichkeitspunkt zweier negativ inversen Kreise k_1 und k_2, und ihre Mittelpunkte liegen auf verschiedenen Seiten resp. auf derselben Seite des Inversionscentrums, je nachdem dasselbe ausserhalb oder innerhalb der Kreise sich befindet.

Schneidet der Kreis k_1 den Inversionskreis, so geht der negativ inverse k_2 durch die diametralen Punkte des Inversionskreises.

Berührt k_1 den Inversionskreis, so berührt k_2 denselben in dem diametralen Punkte.

Das Schneiden oder Berühren der Kreise k_1 und k_2 mit dem Inversionskreis ist gleichartig (und dann nur innerlich) oder ungleichartig*), je nachdem dieselben

*) Der Schnitt von k mit k_1 und k_2 ist gleichartig oder ungleichartig, je nachdem die nach den Schnittpunkten der Kreispaare k_1 k und k_2 k gezogenen Radien gleiche oder supplementäre Winkel bilden. Der Schnitt (oder die Berührung) ist äusserlich oder innerlich, je nachdem der (konkave) Schnittwinkel grösser oder kleiner als ein Rechter ist.

das positive Inversionscentrum ein- oder ausschliessen.

das negative Inversionscentrum aus- oder einschliessen.

Dies gilt überhaupt für alle inversen Kurven. Um die Art und Weise des Schneidens und Berührens untersuchen zu können, ist es nur nötig, die Lage der Krümmungskreise der betreffenden Punkte ins Auge zu fassen.

Einem Kreise, welcher durch zwei Punkte geht, ist der Kreis perspektivisch invers, welcher durch die entsprechenden Punkte geht und dessen Mittelpunkt mit dem des ersteren auf einer durch das Inversionscentrum gehenden Geraden liegt.

Dem Kreise, welcher durch drei Punkte geht, ist der Kreis perspektiv. invers, welcher durch die drei perspektiv. inversen Punkte geht.

Sind die drei Punkte, drei unendlich nahe Punkte einer Kurve, der durch sie gelegte Kreis also ein Krümmungskreis, so folgt: *Dem Krümmungskreise eines gegebenen Kurvenpunktes ist der Krümmungskreis des perspektiv. inversen Kurvenpunktes perspektiv. invers. Besitzt eine Kurve in einem Punkte einen Osculationskreis höherer Ordnung, so entspricht demselben ein Osculationskreis von gleicher Ordnung der persp. inversen Kurve.*

Geht ein Krümmungs- oder Osculationskreis durch das Inversionscentrum, so entspricht demselben eine Wendetangente der perspektivisch inversen Kurve mit Ausnahme des Falls, dass die Kurve in dem betreffenden Punkte ein Maximum oder Minimum ihrer Krümmung hat.

§ 30. Da zwei Kreisen zwei Aehnlichkeitspunkte zugehören, so haben sie also nach § 29,1 zwei Inversionscentra, in Bezug auf welche der eine in den andern übergeht.

Zwei sich schneidende Kreise sind in Bezug auf jeden der beiden Aehnlichkeitspunkte positiv invers.

Zwei ausserhalb einander liegende Kreise sind in Bezug auf

den äusseren Aehnlichkeitspunkt positiv invers.

Zwei sich äusserlich berührende Kreise sind in Bezug auf den äusseren Aehnlichkeitspunkt positiv invers.

den inneren Aehnlichkeitspunkt negativ invers.

Zwei innerhalb einander liegende Kreise sind in Bezug auf

den inneren Aehnlichkeitspunkt positiv invers.

Zwei sich innerlich berührende Kreise sind in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitspunkt positiv invers.

den äusseren Aehnlichkeitspunkt negativ invers.

Zwei sich berührende Kreise können in Bezug auf den Berührungspunkt als positiv oder negativ inverse Kreise gelten, je nachdem sie als sich schneidende Kreise aufgefasst werden oder nicht.

Aus Vorstehendem folgt:

Zwei positiv inverse Kreise können alle Lagen zu einander einnehmen.

Zwei negativ inverse Kreise können sich n i e schneiden.

§ 31. Mit Hilfe der Sätze von § 27 kann leicht gefolgert werden:

Jeder in Bezug auf den Inversionskreis, welcher den äusseren resp. inneren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise k_1 und k_2 zum Mittelpunkte hat, perspektivisch selbstinverse Kreis k wird von denselben gleichartig oder ungleichartig berührt resp. unter demselben Winkel geschnitten, je nachdem k_1 und k_2

das positive Inversionscentrum aus- oder einschliessen, und umgekehrt.

das negative Inversionscentrum ein- oder ausschliessen, und umgekehrt.

Jeder zwei Kreise rechtwinklig schneidende Kreis ist perspektivisch selbstinvers in Bezug auf jeden der beiden Inversionskreise derselben, und umgekehrt.

Zwei perspektivisch inverse Kreispaare können im allgemeinen von vier perspektivisch selbstinversen Kreisen unter einem vorgeschriebenen Winkel geschnitten oder berührt werden.

§ 32. *Werden zu einem Gebilde Σ in Bezug auf zwei k o n c e n t r i s c h e Inversionskreise von den Potenzen p_1 und p_2 die perspektivisch inversen Gebilde Σ_1 und Σ_2 ermittelt, so sind dieselben perspektivisch ä h n l i c h, und das Aehnlichkeitsverhältnis ist gleich dem der Potenzen.*

In Zeichen: Ist

$$\left.\begin{matrix}\Sigma\\ \Sigma_1\end{matrix}\right\} \oplus \text{ oder } \ominus J;\ p_1 \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix}\Sigma\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\} \oplus \text{ oder } \ominus J;\ p_2\ ,$$

so folgt

$$\left.\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\} \backsim J;\ \mu_{12} = \frac{p_1}{p_2} .$$

Das Inversionscentrum ist ein äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunkt, je nachdem die beiden Inversionskreise gleichartig sind oder nicht.

§ 33. Das Princip der Inversion ist sehr geeignet, sowohl aus bekannten Sätzen und Aufgaben neue, allgemeinere zu gewinnen, als auch Sätze und Aufgaben (durch Zurückführung auf einfachere) zu beweisen bez. zu lösen. Namentlich sind es die Sätze der §§ 24, 28, 29, welche dabei zur Anwendung kommen. Das in denselben enthaltene „Uebertragungsprincip" ist schon von Plücker*) mit den Worten ausgesprochen worden:

„Alle Sätze, welche auf eine beliebige Zusammenstellung von beliebigen Kreisen mit geraden Linien oder von geraden Linien unter sich Bezug haben und blose Situations- und Winkelbeziehungen enthalten, lassen sich unmittelbar (durch Inversion) *auf eine Zusammenstellung von beliebigen Kreisen mit solchen Kreisen, die alle durch einen festen Punkt gehen oder von letztbezeichneten Kreisen unter sich übertragen"*, und umgekehrt.

Von besonderer Bedeutung sind folgende bekannte Transformationen:

Zwei sich rechtwinklig schneidende Parallelstrahlenbüschel gehen durch Inversion in zwei sich rechtwinklig schneidende Büschel sich berührender Kreise über, deren gemeinsamer Berührungspunkt das Inversionscentrum ist.

Ein Strahlenbüschel und das rechtwinklig schneidende Büschel koncentrischer Kreise gehen in zwei sich rechtwinklig schneidende Kreisbüschel über. Sämmtliche Kreise des ersteren schneiden sich in zwei reellen Punkten, den sogenannten Grenzpunkten des letzteren Büschels. Das Inversionscentrum ist der eine Schnittpunkt und der inverse vom Mittelpunkte des Strahlenbüschels der andre. Die durch die beiden Schnittpunkte gehende gemeinschaftliche Sehne, (Chordale, Potenzlinie, Radicalaxe) des einen Büschels ist die Centrale des andern und umgekehrt.

---

*) Plücker, Analytisch geometrische Aphorismen. V. 1834. Crelle's Journal, Bd. 11, p. 219.

Zwei orthogonale Kreisbüschel sind in Bezug auf jeden Büschelkreis als positiven Inversionskreis selbstinvers.

Nicht minder wichtig als die vorstehenden Sätze 3 und 4 sind deren Umkehrungen. Vergleiche z. B. unten die Sätze über Transformationen zweier Kreise in zwei andre und deren Anwendungen. § 39 - 42.

§ 34. Ferner können oft die zu beweisenden Sätze und zu lösenden Aufgaben, welche ohne Weiteres nicht durch Inversion auf bekannte Sätze oder gelöste Aufgaben sich zurückführen lassen, derartig umgestaltet werden, dass eine Uebertragung zum Ziele führt.

Es mögen einige Beispiele folgen:

Werden in einem (konvexen, konkaven oder überschlagenen) Viereck ABCD, dessen Diagonalen sich rechtwinklig schneiden, von ihrem Schnittpunkte O aus Gerade gezogen, welche die Seiten unter gleichen Winkeln in den Punkten $A_1B_1C_1D_1$ schneiden — jedoch so, dass die von diesen Geraden und den ebenfalls von O auf die Seiten gefällten Loten mit den Seiten gebildeten Dreiecke gleichwendig ähnlich sind — so liegen die Punkte $A_1B_1C_1D_1$ auf einem Kreise).*

Da, wie leicht nachzuweisen, je vier Punkte OD_1AA_1, OA_1BB_1, OB_1CC_1, OC_1DD_1 auf einem Kreise liegen, und je zwei dieser Kreise, welche durch einen der Punkte $A_1B_1C_1D_1$ gehen, sich rechtwinklig schneiden, so kann obiger Satz auch in der Form ausgesprochen werden: *Befinden sich die Mittelpunkte von vier durch einen Punkt O gehenden Kreisen a, b, c, d paarweise auf zwei in diesem Punkte sich rechtwinklig schneidenden Geraden, so liegen ihre vier andern Schnittpunkte $A_1B_1C_1D_1$ auf einem Kreise.* Durch Inversion in Bezug auf O als Inversionscentrum gehen die vier sich paarweise in $A_1B_1C_1D_1$ rechtwinklig schneidenden Kreise *a, b, c, d* in vier Gerade a', b', c', d' über, welche sich in den inversen Punkten $A'_1B'_1C'_1D'_1$ *ebenfalls rechtwinklig* schneiden. Da sich nun durch diese vier Punkte, welche mithin ein Rechteck bilden, stets ein Kreis legen lässt, und die Inverse eines Kreises im allgemeinen wieder ein Kreis ist, so liegen also auch die Punkte $A_1B_1C_1D_1$ auf einem Kreise.

---

*) Ein specieller Fall von diesem Satze und der analoge für den Raum rührt von J. Steiner her. Vergleiche: „Geometrische Lehrsätze und Aufgaben" in Crelle's Journal, Bd. XXXI, pag. 91 oder Ges. Werke, Bd. II, pag. 356.

Als zweites Beispiel folge die Lösung eines Problems, mit dem ein arabischer Mathematiker *Abû Alî al Hasan ibn al Hasan ibn Alhaitam* aus *Al-Basra* († 1038) sich zuerst beschäftigt hat. Diese Aufgabe, kurz die Alhazen'sche genannt, lautet: *Auf einem sphärischen Konkav- oder Konvexspiegel, wenn Gegenstand und Auge der Lage nach gegeben sind, die Reflexionspunkte zu finden,* d. h. diejenigen Punkte, welche die von dem Gegenstande ausgehenden Lichtstrahlen in das Auge zurückwerfen*).

Ist J das Centrum des sphärischen Spiegels, G_1 der Lichtpunkt und A_1 das Auge, so liegen die Reflexionspunkte R in der durch jene drei bestimmten Ebene, und zwar so, dass Winkel $G_1RJ = JRA_1 = \alpha$ ist. Alle Punkte R_1 nun, welche dieser Bedingung genügen, beschreiben eine vorläufig unbekannte Kurve, deren Schnittpunkte R mit dem Spiegelkreis i die gesuchten sind. Werden um JG_1R_1 und JA_1R_1 die Kreise g_1 und a_1 beschrieben, so entsprechen denselben in Bezug auf i als Inversionskreis zwei Gerade g_2 und a_2, welche durch die zu G_1 und A_1 positiv inversen Punkte G_2 und A_2 gehen und mit G_2J resp. A_2J die gleichen Winkel α einschliessen. Der zu R_1 positiv inverse Punkt R_2 ist also der Schnittpunkt zweier durch die festen Punkte G_2 und A_2 gehenden Geraden, welche immer mit den durch J gehenden gleiche Winkel einschliessen. Der Punkt R_2 beschreibt daher bekanntlich eine gleichseitige Hyperbel, welche durch den Spiegelmittelpunkt J geht. Ihre vier Schnittpunkte R mit dem Spiegel sind die gesuchten Punkte, „es sind jedoch nur zwei davon wirklich reflektierende Punkte; bei den beiden andern halbiert das Einfallslot JR nicht den Winkel zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl, sondern den Nebenwinkel."

§ 35. Für positiv inverse Systeme gilt folgender wichtige Satz: *Sind zwei Systeme Σ_1 und Σ_2 positiv invers in Bezug auf einen Kreis k und werden in Bezug auf einen beliebigen Inversionskreis i die perspektivisch inversen Systeme Σ'_1 Σ'_2 k' ermittelt, so sind auch Σ'_1 und Σ'_2 in Bezug auf k' positiv inverse Systeme***).

*) Dr. P. Bode giebt in den Berichten des Freien Deutschen Hochstiftes zu Frankfurt a. M., 1885/86, Heft 3 u. 4. p. 296 nach einem geschichtlichen Ueberblick eine analytische Lösung.

**) Prof. Dr. C. Neumann, Mathem. Seminar, 1878. Universität Leipzig.

also zwei gegenwendigen kongruenten Strahlenbüscheln

In Zeichen: Ist

$$\left.\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\} \oplus k \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix}\Sigma_1 & \Sigma_2 & k\\ \Sigma_1' & \Sigma_2' & k'\end{matrix}\right\} \oplus \text{ oder } \ominus\ i \quad ,$$

so folgt

$$\left.\begin{matrix}\Sigma_1'\\ \Sigma_2'\end{matrix}\right\} \oplus k' \quad .$$

2 Es ist nur nötig, diesen Satz für ein entsprechendes Punktpaar P_1 und P_2 der beiden positiv inversen Systeme Σ_1 und Σ_2 zu beweisen. Werden zum Kreise k und zu den beiden in Bezug auf denselben positiv inversen Punkten P_1 und P_2 die in Bezug auf den Kreis i perspektivisch inversen Gebilde: der Kreis k' und die Punkte P'_1 und P'_2 konstruiert, so liegen die vier Punkte P_1 P_2 P'_1 P'_2 auf einem in Bezug auf i perspektivisch selbstinversen Kreise r (§ 24,7), welcher den Kreis k (§ 24,1) und also ebenfalls den Kreis k' (§ 29,2) rechtwinklig schneidet, mithin in Bezug auf k' positiv selbstinvers ist. Da nun ferner (§ 28,1) der Geraden g, welche durch P_1, P_2 geht und mithin den Kreis k rechtwinklig schneidet, ein durch P'_1 P'_2 und das Inversionscentrum I gehender Kreis g' perspektivisch invers ist, welcher den Kreis k' rechtwinklig durchschneidet, also positiv selbstinvers in Bezug auf denselben ist, so sind die beiden Punkte P'_1 P'_2 als Schnittpunkte zwei positiv inverse Punkte in Bezug auf k' als Inversionskreis.

3 Es fragt sich, ob obiger Satz auch Giltigkeit hat bei Uebertragung von negativ inversen Systemen durch perspektivische Inversion. Bedeuten Q_1 und Q_2 zwei negativ inverse Punkte in Bezug auf den Kreis k, und werden wieder in Bezug auf i die perspektivisch inversen Gebilde Q'_1 Q'_2 k' ermittelt, so liegen dieselben wieder auf einem Kreise q, welcher in Bezug auf i perspektivisch selbstinvers ist. Derselbe geht als negativ selbstinverser Kreis zu k durch diametrale Punkte des letzteren. Es ist nun leicht ersichtlich, dass q im allgemeinen nicht auch durch diametrale Punkte von k' gehen kann, denn bezeichnen S_1 und S_2 die Schnittpunkte von q mit k, so ist der Geraden S_1 K S_2 (K bedeutet den Mittelpunkt des Kreises k) ein durch S'_1 S'_2 und das Inversionscentrum I gehender Kreis perspektivisch invers, welcher den Kreis k' rechtwinklig schneidet, sodass der Mittelpunkt K' des Kreises k' ausserhalb des durch S'_1 S'_2 I bestimmten Kreises liegt. Es kann daher die Verbindungsgerade von S'_1 S'_2 nicht durch den Mittelpunkt von

k' gehen. Die Punkte Q'_1 Q'_2 liegen daher auf einem Kreise, welcher nicht durch diametrale Punkte von k' geht, sie können folglich keine negativ inversen Punkte in Bezug auf k' sein. — Es könnte noch sein, dass sie positiv invers wären, aber auch das ist nicht möglich, denn q schneidet den Kreis k in diametralen Punkten, folglich im allgemeinen nicht rechtwinklig und mithin k' auch nicht rechtwinklig, was der Fall sein müsste, wenn Q'_1 Q'_2 in Bezug auf k' positiv invers sein sollten.

Für negativ inverse Systeme gilt nur der folgende Specialsatz:

Sind zwei Systeme Σ_1 und Σ_2 negativ invers in Bezug auf einen Kreis k und werden in Bezug auf einen beliebigen, jedoch zu k koncentrischen Inversionskreis i die perspektivisch inversen Systeme Σ'_1 Σ'_2 k' ermittelt, so sind auch Σ'_1 und Σ'_2 in Bezug auf k' negativ inverse Systeme.

Handelt es sich nicht um beliebige Gebilde, sondern nur um die negativ selbstinversen Kreise r in Bezug auf einen Kreis k, welche durch dieselben diametralen Punkte $P_1 P_2$ des letzteren gehen, und werden die in Bezug auf einen Inversionskreis i, dessen Centrum auf der Geraden $P_1 P_2$ liegt, die perspektiv. inversen Kreise r' und k' ermittelt, so sind die Kreise r' negativ selbstinvers in Bezug auf k'.

Von vorstehenden Sätzen mögen einige wichtige Anwendungen Platz finden:

§ 36. Werden zwei Kreise nebst positivem Inversionskreis in Bezug auf ihren andern (negativen bez. positiven) Inversionskreis transformiert, so geht jeder in den andern über; mithin bleibt der Inversionskreis erhalten, und es folgt:

Der positive Inversionskreis zweier sich nicht schneidender Kreise ist negativ selbstinvers in Bezug auf den negativen Inversionskreis beider Kreise. Die beiden positiven Inversionskreise zweier sich schneidender Kreise schneiden sich rechtwinklig).*

Es ist leicht zu erweisen, dass der Punkt, in welchem die Potenzaxe zweier Kreise die Centrale schneidet, und je ein Aehnlichkeitspunkt inverse Punkte sind in Bezug auf den Inversionskreis, welcher zum andern Aehnlichkeitspunkte gehört; mithin ergiebt sich:

---

*) Wird der negative Inversionskreis als positiver von imaginärem Radius aufgefasst, so folgt: *Die beiden Inversionskreise zweier Kreise sind orthogonal.*

Der Aehnlichkeitskreis) und die Potenzaxe zweier Kreise sind invers in Bezug auf jeden der beiden Inversionskreise.*

3 Da jeder zwei Kreise rechtwinklig schneidende Kreis, welcher also nach § 31,2 selbstinvers ist, den, bez. die positiven Inversionskreise und, nach vorstehendem Satze, den Aehnlichkeitskreis ebenfalls rechtwinklig schneidet, so resultiert: *Zwei Kreise, ihr Aehnlichkeitskreis und ihre positiven Inversionskreise bilden einen Kreisbüschel**).*

1 § 37. Es seien drei Kreise c in Bezug auf einen Kreis p vom Mittelpunkte P

positiv selbstinvers.

Je zwei derselben können nach (§ 26,6) alle Lagen zu einander einnehmen, und ein jeder schliesst das Centrum P aus.

2 Da jeder Kreis c den Kreis p rechtwinklig schneidet, so geht (nach § 33,4) die Potenzaxe von je zwei derselben durch P. Die von P an die Kreise c gezogenen Tangenten sind einander gleich.

negativ selbstinvers.

Je zwei derselben müssen sich (nach § 26,6) schneiden, und ein jeder schliesst das Centrum P ein.

Da die Schnittpunkte je zweier Kreise c negativ inverse Punkte sind, so geht die Potenzaxe von je zwei derselben durch P. Die durch P gehenden kleinsten Sehnen der Kreise c sind einander gleich.

Es folgen daher die bekannten Sätze:

3 *Die drei Potenzaxen, welche je zweien von drei Kreisen zugehören, schneiden sich in einem Punkte, ihrem Potenzpunkte oder Radicalcentrum.*

4 *Drei beliebige Kreise c, deren Potenzpunkt P ausserhalb derselben liegt, werden von einem Kreise p rechtwinklig geschnitten,* und zwar von demjenigen, welcher P zum Mittelpunkte hat und durch die Berührungspunkte der von P an die Kreise c gelegten Tangenten geht.

Drei sich schneidende Kreise c, deren Potenzpunkt P innerhalb derselben liegt, sind negativ selbstinvers in Bezug auf den Kreis p, welcher P zum Mittelpunkte hat und durch die Endpunkte der durch P gezogenen kleinsten Sehnen der Kreise c geht.

---

*) Der Aehnlichkeitskreis zweier Kreise ist derjenige, welcher die Aehnlichkeitspunkte derselben zu Endpunkten eines Durchmessers hat.

**) Von zwei inversen Kreisen ist der eine c' durch den andern c und ihren Aehnlichkeitskreis a eindeutig gegeben, denn c und a bestimmen die Potenzaxe p, und p und a die Inversionskreise.

§ 38. Die Anzahl der Bildpunkte P_1 P_2 . . ., welche zwei spiegelnde Gerade g_1 und g_2 von irgend einem Punkte P erzeugen, ist bekanntlich eine begrenzte oder unbegrenzte, je nachdem der Winkel, den die Geraden mit einander bilden, ein rationaler Bruchteil von 180^0 ist oder nicht. Bedeuten m und n ganze, relative Primzahlen, und ist der Winkel $\alpha = \frac{m}{n}\, 180^0$, so entstehen $(2\,n-1)$ Bildpunkte; es resultiert also, den gegebenen Punkt mitgerechnet, eine Gruppe von $2\,n$ Punkten.

Die einzelnen Bildpunkte entstehen nach einander wie folgt: Von dem gegebenen Punkte P wird in Bezug auf die eine Gerade g_1 das Bild P_1 ermittelt, von diesem in Bezug auf die andre Gerade g_2 das Bild P_2, von diesem wiederum in Bezug auf die erste Gerade g_1 das Bild P_3 und abwechselnd so fort. Der $2.n$ te Bildpunkt fällt dann wieder mit dem gegebenen zusammen.

Es ist leicht ersichtlich, dass die Punkte auf einem Kreise liegen, welcher beide Gerade rechtwinklig schneidet, und dass sowohl die Punkte mit geraden, als auch die mit ungeraden Indices je ein regelmässiges n-Eck bilden.

Die beiden spiegelnden Geraden können als Inversionskreise von ∞ Radius, und die zu beiden symmetrisch gelegenen $2\,n$ Punkte als zwei inverse Gruppen von je n Punkten aufgefasst werden. Wird nun zu dieser Figur in Bezug auf einen beliebigen Inversionskreis die inverse gebildet, so resultiert nach § 35 der Satz:

*Schneiden sich zwei Kreise k_1 und k_2 unter einem Winkel $\frac{m}{n}\, 180^0$, der ein rationaler Bruchteil von 180^0 ist, und werden, von einem beliebigen Punkte P ausgehend, abwechselnd die inversen Punkte P_1 P_2 P_3 . . . in Bezug auf k_1 und k_2 als positive Inversionskreise bestimmt, so fällt der $2\,n$ te Punkt wieder mit dem ursprünglichen zusammen. Sämmtliche Punkte liegen auf einem Kreise k, welcher die gegebenen rechtwinklig schneidet**). Werden die Punkte P der Einfachheit wegen nur durch ihre Indices angedeutet, so ergiebt sich in Zeichen:

$$k \begin{matrix} n\,, & 2\,, & 4\,, & \ldots\ldots & , (2\,n-2) \\ 1\,, & 3\,, & 5\,, & \ldots\ldots & , (2\,n-1) \end{matrix} \Bigg\} \oplus k_1$$

und

$$k \begin{matrix} 1\,, & 3\,, & 5\,, & \ldots\ldots & , (2\,n-1) \\ 2\,, & 4\,, & 6\,, & \ldots\ldots & ,\quad n \end{matrix} \Bigg\} \oplus k_2$$

---

*) Prof. Dr. C. Neumann, a. a. O.

1 § 39. Da viele Probleme, welche zu zwei oder mehreren, der Lage und Grösse nach gegebenen Kreisen in Beziehung stehen, für besondere Lagen und Grössenverhältnisse sich ganz einfach gestalten, so sind die inversen Transformationen, welche zwei oder mehrere Kreise in solche von vorgeschriebenen Bedingungen verwandeln, von grosser Wichtigkeit. Da es hierbei nur auf die Verhältnisse der Grössen ankommt, welche zu den transformierten Kreisen Bezug haben, und dieselben nach § 32 für koncentrische Inversionskreise ungeändert bleiben, so enthalten die betreffenden Sätze immer den geometrischen Ort des Inversionscentrums und nicht etwa die Enveloppe des Inversionskreises, welcher die beabsichtigte Transformation bewirkt.

Aus den Umkehrungen der Sätze § 33, 3—4 folgt ohne Weiteres:

2 *Zwei sich nicht schneidende Kreise gehen in Bezug auf jeden ihrer beiden auf der Centrale gelegenen Grenzpunkte in zwei koncentrische Kreise über.*

3 *Zwei sich berührende Kreise gehen in Bezug auf ihren Berührungspunkt in zwei parallele Gerade über.*

4 *Zwei sich schneidende Kreise gehen in Bezug auf jeden ihrer beiden Schnittpunkte in zwei sich schneidende Gerade über.*

5 Zwei Kreise k_1 und k_2 können daher immer entweder in zwei koncentrische Kreise oder in zwei sich schneidende Gerade transformiert werden. Der Satz 3 ist sowohl ein Specialfall von 2 als von 4.

Als Anwendung dieser Sätze mögen einige über Kreisreihen oder Kreisscharen Platz finden, welche durch vorstehende Transformationen auf Sätze führen, deren Richtigkeit ohne Weiteres ersichtlich ist.

6 Alle Kreise c, welche einen Kreis k_1 unter dem Winkel α_1 und einen Kreis k_2 unter dem Winkel α_2 schneiden, werden von jedem andern, zum Büschel der Kreise k_1 und k_2 gehörenden Kreise k unter einem und demselben Winkel γ geschnitten, und im Besonderen von zwei Kreisen berührt.

7 Bilden die Kreise c eine Reihe von Kreisen, von denen jeder den unmittelbar vorhergehenden berührt oder unter einem bestimmten Winkel γ schneidet, so liegen ihre Berührungs-, bez. Schnittpunkte auch auf einem, bez. zwei Kreisen des Büschels. Derselbe ist im ersteren Falle einer der Inversionskreise von k_1 und k_2.

Wenn sich die Reihe der Kreise c_1, c_2, schliesst, d. h. wenn nach einem oder mehreren (m) Umläufen der $n$te Kreis c_n den Kreis c_1 ebenfalls berührt oder unter dem bestimmten Winkel γ schneidet, so findet dies stets statt, wo man auch den ersten Kreis c_1 annehmen mag.

Dieser Satz hat nur dann einen Sinn, wenn die beiden Kreise k_1 und k_2 sich nicht schneiden, da nur in diesem Falle die Anzahl n der Kreise c eine endliche ist*).

§ 40. Werden zwei Kreise in Bezug auf einen beliebigen Punkt ihres positiven Inversionskreises transformiert, so folgt nach § 35:

Zwei Kreise lassen sich immer in zwei gleiche verwandeln und zwar in Bezug auf jeden Punkt ihres, bez. ihrer beiden positiven Inversionskreise.

Als Anwendung dieses Satzes mögen einige wichtige Transformationen von vier beliebigen Punkten eines Kreises folgen:

Um irgend vier Punkte P eines Kreises oder einer Geraden g in zwei symmetrische Punktpaare zu verwandeln, ordne man sie zu zwei Paaren, von denen jedes durch das andre getrennt ist, lege hierauf durch je eines derselben die Kreise k_1 und k_2, welche den Träger g der Punkte P rechtwinklig schneiden, und verwandle die beiden Kreise k_1 und k_2 in gleiche. Die vier inversen Punkte P' bilden dann als symmetrische Punktpaare die Ecken eines Antiparallelogramms. Insbesondere ergiebt sich:

Die vier Punkte P' liegen symmetrisch auf einer Geraden g', wenn als Transformationscentrum einer der vier Punkte genommen wird, in welchen die Inversionskreise von k_1 und k_2 den Träger g schneiden.

Die vier Punkte P' bilden ein Rechteck in Bezug auf jeden der beiden Punkte als Centrum, welche die Schnittpunkte der Kreise k_1 und k_2 und ihrer Inversionskreise sind.

Sind die Punkte P einer Geraden harmonisch, so gehen dieselben durch Inversion in ein harmonisches Kreisviereck über**).

*) Der Specialsatz für $\alpha_1 = \alpha_2 = o$ und $\gamma = o$ findet sich bei Steiner, *Systemat. Entwickelung der Abhängigkeit geom. Gestalten,* Aufgabe 80 des Anhanges, oder Ges. W. Bd. I. p. 455 und in den Annales de Mathématiques. T. XIX, p. 36, od. Ges. W. I. p. 225.

Weiter unten werden wir einen analogen für Bicircular-Kurven aufstellen.

**) Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln etc. 1879. p. 31. Vergleiche § 43 dieser Abhandlung.

Da (nach § 20,3) sich die Kreise k_1 und k_2, von denen jeder zwei getrennte harmonische Punkte einer Geraden zu Durchmesserpunkten hat, rechtwinklig schneiden, so ergiebt sich aus 4:

Vier harmonische Punkte einer Geraden oder eines Kreises gehen durch Inversion in Bezug auf jeden der beiden Punkte als Centrum, in welchen sich die Kreise k_1 und k_2 und ihre Inversionskreise schneiden, in die Ecken eines Quadrates über.

§ 41. Jeder Punkt der Potenzaxe zweier Kreise als Centrum hat einen Inversionskreis, für welchen dieselben selbstinvers sind. Werden die Kreise nun in Bezug auf diesen und einen beliebigen koncentrischen Inversionskreis transformiert, so folgt nach § 32 die perspektivische Aehnlichkeit der transformierten Figuren, und da die erstere derselben mit der ursprünglichen identisch ist, so ergiebt sich:

In Bezug auf jeden Punkt der Potenzaxe wird die Figur zweier Kreise in eine perspektivisch ähnliche verwandelt.

Es seien zu zwei Kreisen c_1 und c_2 in Bezug auf einen beliebigen Punkt A ihres Aehnlichkeitskreises c_1' und c_2' die inversen Kreise. Werden die Längen der vom Inversionscentrum an die Kreise gezogenen Tangenten mit t, die Entfernungen der Mittelpunkte mit s, und die Radien mit c bezeichnet, so bestehen die Proportionen

$$(\alpha_1) \qquad s_1 : t_1 : c_1 = s_1' : t_1' : c_1'$$

und

$$(\alpha_2) \qquad s_2 : t_2 : c_2 = s_2' : t_2' : c_2' \, .$$

Da nun (nach § 20) für jeden Punkt A des Aehnlichkeitskreises der Kreise c_1 und c_2

$$(\beta) \qquad s_1 : t_1 : c_1 = s_2 : t_2 : c_2$$

ist, so folgt durch Substitution von (α_1) und (α_2):

$$(\beta') \qquad s_1' : t_1' : c_1' = s_2' : t_2' : c_2' \, .$$

D. h. das Inversionscentrum A ist auch ein Punkt des Aehnlichkeitskreises der transformierten Kreise c_1' und c_2'.

Da ferner die Tangentialpunkte der vier Kreise zwei inverse Punktpaare sind, also der Beziehung

$$(\gamma) \qquad t_1 : t_2 = t_2' : t_1'$$

genügen, so ergeben sich nach (β) und (β') die Proportionen

$$(\delta) \qquad c_1 : c_2 = c_2' : c_1' = s_1 : s_2 = s_2' : s_1' \, ,$$

oder in Worten:

In Bezug auf jeden Punkt des Aehnlichkeitskreises zweier Kreise werden dieselben in zwei andre vom reciproken Aehnlichkeitsverhältnisse verwandelt.

Werden c_1 und c_2' als die ursprünglich gegebenen aufgefasst, so sind c_1' und c_2 die inversen. A ist selbstverständlich ein Punkt eines jeden der beiden Aehnlichkeitskreise, welche den Kreispaaren c_1, c_2' und c_1', c_2 zugehören, und da A ferner auf den Aehnlichkeitskreisen der Kreispaare c_1, c_1' und c_2, c_2' liegt, so gehen alle sechs Aehnlichkeitskreise durch den Punkt A. Da ferner durch die vier Kreise c (nach § 31,3) ein Kreis p geht, welcher sie rechtwinklig schneidet, und derselbe (nach § 33,5) alle Kreise, welche mit je zweien der Kreise c zu einem Bündel gehören, mithin (nach § 36,3) auch die Aehnlichkeitskreise, rechtwinklig schneidet, so gehen die Aehnlichkeitskreise als selbstinverse zum Kreise p noch durch den zu A in Bezug auf p inversen Punkt. Es folgt also der Satz:

Werden in Bezug auf einen beliebigen Punkt des Aehnlichkeitskreises zweier Kreise ihre inversen ermittelt, so gehen die sechs Aehnlichkeitskreise, welche je zweien der vier Kreise zugehören, durch zwei Punkte; sie bilden daher ein Kreisbüschel.

Hieraus lässt sich leicht unter Anwendung von § 35 noch der wichtige Satz ableiten:

Werden in Bezug auf einen beliebigen Punkt A des Aehnlichkeitskreises a zweier Kreise c_1, c_2 ihre inversen c_1', c_2' bestimmt, so sind die Potenzaxe p' und der Aehnlichkeitskreis a' der inversen Kreise zu dem Aehnlichkeitskreise a und der Potenzaxe p der ursprünglichen Kreise in Bezug auf A inverse Gebilde; dasselbe gilt von dem andern Schnittpunkt A_0 der beiden Aehnlichkeitskreise und dem Schnittpunkt P_0 der Potenzaxen. In Zeichen:

$$\left.\begin{matrix} c_1 & c_2 & a & p & P_0 \\ c_1' & c_2' & p' & a' & A_0 \end{matrix}\right\} \oplus \text{ oder } \ominus A.$$

Ein Specialfall hiervon ist § 36,2.

§ 42. An die in §§ 39—41 behandelten Transformationen schliessen sich nun diejenigen an, welche auf ein vorgelegtes System von drei Kreisen Bezug haben. Die wichtigsten dieser Probleme sollen an dieser Stelle nur kurz angeführt und erst später eingehend erörtert werden, da die meisten derselben zur Auflösung und besonders zur Determination Sätze nötig haben, welche erst weiter unten im Zusammenhange mit andern behandelt werden.

Einige Probleme (z. B. die Verwandlung dreier Kreise in drei gleiche) lassen sich zwar einfach durch eine Kombination der Transformationen lösen, welchen je zwei der vorgelegten Kreise unterworfen werden müssen. Andre hingegen (z. B. die Verwandlung dreier Kreise in eine lineare Reihe, d. h. in drei Kreise mit gemeinschaftlichem Aehnlichkeitspunkt) erfordern zur Auflösung Sätze über Kreise, welche drei gegebene unter bestimmten Winkeln schneiden.

Nach diesen Bemerkungen mögen folgende Sätze Platz finden:

Drei Kreise mit positivem Potenzpunkt gehen in Bezug auf jeden Punkt des Potenzkreises in drei andre über, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen.

Drei sich nicht schneidende Kreise können nur dann, wenn sie einem Büschel angehören, in drei koncentrische verwandelt werden, und zwar in Bezug auf jeden ihrer beiden Grenzpunkte.

Drei Kreise gehen in Bezug auf jeden Schnittpunkt zweier positiven Inversionskreise, welche nicht beide demselben Kreispaare zugehören, in drei gleiche über.

Drei Kreise c mit positivem Potenzpunkt gehen in drei andre Kreise mit gemeinschaftlichem Aehnlichkeitspunkt in Bezug auf die Punkte über, in welchen der Potenzkreis von einem beliebigen Kreise geschnitten wird, welcher die Kreise c gleichwinklig schneidet.

§ 43. Für die Inversion, wie für die neuere Geometrie überhaupt, ist das Doppelverhältnis von vier Elementen von hervorragender Bedeutung. Sind $A\ B\ C\ D$ vier beliebige Punkte einer Kurve (oder speciell einer Geraden), so heisst nach Möbius der Doppelbruch

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA}$$

das Doppelverhältnis der vier Punkte $A\ B\ C\ D$ und wird symbolisch durch

$$(A\ B\ C\ D)$$

bezeichnet*).

Bezeichnen $A'\ B'\ C'\ D'$ die zu $A\ B\ C\ D$ inversen Punkte in Bezug auf einen beliebigen Inversionskreis J, so bestehen, da (nach

*) Möbius, Theorie der Kreisverwandtschaft. § 11, od. Ges. W. Bd. II, p. 261. Steiner, System. Entwickelung, art. 4, od. Ges. W., Bd. I, p. 243. Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie d. Kegelschnitte, 1887. Bd. I, p. 123.

§ 20,1) die von inversen Punktpaaren mit dem Inversionscentrum gebildeten Dreiecke gegenwendig ähnlich sind, folgende Gleichungen:

$$\frac{AB}{AJ} = \frac{A'B'}{B'J} \qquad \frac{CD}{CJ} = \frac{C'D'}{D'J}$$

$$\frac{BC}{CJ} = \frac{B'C'}{B'J} \qquad \frac{DA}{AJ} = \frac{D'A'}{D'J}$$

Wird das Produkt der beiden oberen Gleichungen durch das Produkt der beiden unteren dividiert, so ergiebt sich

$$\frac{AB\,.\,CD}{BC\,.\,DA} = \frac{A'B'\,.\,C'D'}{B'C'\,.\,D'A'}$$

oder

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{A'B'}{C'B'} : \frac{A'D'}{C'D'}$$

oder in symbolischer Bezeichnung

$$(A\ B\ C\ D) = (A'\ B'\ C'\ D')\ .$$

Bei inversen Systemen ist das Doppelverhältnis von je vier beliebigen Punkten des einen Systems gleich dem der vier entsprechenden Punkte des andern Systems.

Ausser dem obigen Doppelverhältnis besitzen vier beliebige Punkte noch fünf andre, je nach der Anordnung, in welcher sie betrachtet werden. Liegen die vier Punkte auf einem Kreise oder einer Geraden, so stehen die sechs Doppelverhältnisse derselben in einem einfachen Zusammenhange, welcher sich mit Hilfe des Ptolemäischen Lehrsatzes

$$AB\,.\,CD + AC\,.\,DB + AD\,.\,BC = o$$

leicht erweisen lässt. Wird $(ABCD)$ mit v bezeichnet*), so folgt:

$$(ABCD) = v \qquad (ABDC) = \frac{1}{v}$$

$$(ACBD) = 1 - v \qquad (ACDB) = \frac{1}{1-v}$$

$$(ADBC) = \frac{v-1}{v} \qquad (ADCB) = \frac{v}{v-1}$$

Von den Specialwerten, welche das Doppelverhältnis haben kann, ist $v = -1$ hervorzuheben, welches vier harmonischen Punkten entspricht. Aus

*) Möbius macht in seiner *Theorie der Kreisverwandtschaft* § 12, od. Ges. W. Bd. II, p. 262 darauf aufmerksam, dass er früher (in seinem *Baryc. Calcul*) unter dem Doppelverhältnisse $(ABCD)$ dasjenige verstanden habe, welches oben nach seiner späteren Bezeichnungsweise mit $(ACBD)$ bezeichnet worden ist.

$$(A\,B\,C\,D) = -1$$

folgt (mit Berücksichtigung der Vorzeichen)

$$(\alpha) \qquad AB\,.\,CD = AD\,.\,BC\,.$$

Da ferner $1 - \nu = +2$ ist, so ergiebt sich aus

$$(A\,C\,B\,D) = +2$$

die Gleichung

$$(\beta) \qquad AC\,.\,BD = 2\,.\,AD\,.\,BC.$$

Es folgt also aus (α) und (β) der Satz:

In einem harmonischen Sehnenviereck sind die Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten einander gleich und halb so gross als das Rechteck aus den Diagonalen.

§ 44. Analoge Sätze, wie zwischen den Doppelverhältnissen der Seiten inverser Vierecke, finden auch zwischen ihren Winkeln statt.

Unter einem Winkel $X\,Y\,Z$ werde derjenige verstanden, um den $Y\,X$ in (angenommener) positiver Richtung gedreht werden muss, um auf $Y\,Z$ zu fallen, so dass also immer Winkel $X\,Y\,Z + Y\,Z\,X = 0$ (mod. 360°). Jeder Winkel $X\,Y\,Z$ wird von dem Inversionsstrahl $Y\,J$ (äusserlich oder innerlich) geteilt. Zur Abkürzung werde im folgenden Winkel $X\,Y\,J = Y_X$ gesetzt.

Aus der gegenwendigen Aehnlichkeit der Dreiecke, welche inverse Punktpaare mit dem Inversionscentrum bilden, folgt:

$$B_A + A'_{B'} = 0, \qquad B_C + C'_{B'} = 0,$$
$$D_C + C'_{D'} = 0, \qquad D_A + A'_{D'} = 0.$$

Wird zur Differenz der beiden oberen Gleichungen die Differenz der beiden unteren addiert, so ergiebt sich:

$$A'_B - A'_D + B_A - B_C + C'_D - C'_B + D_C - D_A = 0$$

oder

$$B'A'D' + A\,B\,C + D'C'B' + C\,D\,A = 0 \text{ (mod. } 360^\circ).$$

Da nun ebenfalls

$$B'A'D' + A'B'C' + D'C'B' + C'D'A' = 0 \text{ (mod. } 360^\circ),$$

so folgt

$$A\,B\,C + C\,D\,A = A'B'C' + C'D'A'.$$

Wird nun die Summe zweier gegenüberliegender Winkel ein Doppelwinkel genannt, so heisst dies in Worten:

Bei inversen Systemen ist der Doppelwinkel von je vier beliebigen Punkten des einen Systems gleich dem der vier entsprechenden Punkte des andern Systems.

§ 45. Wird zu einer beliebigen Kurve die Inverse, die reciproke Polare, die Fusspunktkurve etc. in Bezug auf einen und denselben Punkt ermittelt, so bestehen zwischen diesen Kurven wichtige Beziehungen, welche im Folgenden erörtert werden sollen: 1

Es seien C und C' zwei unendlich nahe Punkte einer Kurve c, C_i und C_i' die entsprechenden der inversen Kurve c_i, und C_p der Schnittpunkt der beiden entsprechenden Polaren.*) Da dieselben den gleichen Winkel einschliessen, wie die beiden Inversionsstrahlen, so liegt das Inversionscentrum J mit C_p und den unendlich nahen Punkten C_i und C_i' auf einem Kreise. Derselbe berührt die Kurve c_i und ist der durch C und C' gehenden Tangente der Kurve c invers. Da ferner die Polaren senkrecht auf den Inversionsstrahlen stehen, so sind die Punkte J und C_p Endpunkte eines Durchmessers. Derselbe schneidet also die dem Punkte C der Kurve c zugehörige Tangente senkrecht, und der Schnittpunkt (Fusspunkt) C_f **) ist der inverse vom Punkte C_p. Für die Kurven c_f und c_p, welche die Punkte C_f und C_p beschreiben, folgt daher der Satz:

I. In Bezug auf dasselbe Centrum J sind die Fusspunktkurve c_f [c_i] *und die reciproke Polare* c_p [c] *einer Kurve* c [c_p] *inverse Kurven.* 2

Da nun c die negative Fusspunktkurve und c_p die Inverse von c_f ist, so ergiebt sich: 3

II. In Bezug auf dasselbe Centrum J sind die negative Fusspunktkurve c_{-f} [c_p] *und die Inverse* c_i [c] *einer Kurve* c [c_i] *reciproke Polare****).

---

*) Die Polare eines Punktes C in Bezug auf einen Kreis ist die im inversen Punkte C_i auf dem Inversionsstrahl errichtete Normale. In Bezug auf einen Kreis ist die reciproke Polare C_p einer gegebenen Kurve C die Enveloppe der Polaren der Kurve C, d. h. der Ort der Schnittpunkte der aufeinander folgenden Polaren. Ist die Kurve C_p die reciproke Polare der Kurve C, so ist umgekehrt C die reciproke Polare von C_p.

**) Wird von einem festen Punkt die Normale zur Tangente einer Curve C gezogen, so heisst der geom. Ort des Fusspunktes C_{f1} die Fusspunktkurve der gegebenen Curve C. Wird zu der Fusspunktkurve abermals die Fusspunktkurve C_{f2} bestimmt, u. s. w., so heissen dieselben die zweite, dritte u. s. w. Fusspunktkurve zur gegebenen Kurve C. Wird die Reihe rückwärts fortgesetzt (ist also die gegebene die Fusspunktkurve von C_{-f1}), so heisst die Kurve C_{-f1} die erste negative Fusspunktkurve von der gegebenen C.

***) Die Sätze I. u. II. sind in Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie per höheren ebenen Kurven p. 124, § 123 erwähnt.

4 *III. In Bezug auf dasselbe Centrum J ist die Inverse c_i einer Kurve c die Fusspunktkurve ihrer reciproken Polare c_p, oder umgekehrt:*

5 *IV. In Bezug auf dasselbe Centrum J ist die reciproke Polare c_p einer Kurve c die negative Fusspunktkurve ihrer Inversen c_i.*

6 Es gelten überhaupt folgende Identitäten:

III.		I.		II.		IV.
c_f	$=$	$(c_p)_i$		$(c_f)_p$	$=$	$(c_p)_{-f}$
$(c_p)_f$	$=$	c_i	$=$	$(c_{-f})_p$		
		$(c_f)_i$	$=$	c_p	$=$	$(c_i)_{-f}$
$(c_i)_f$	$=$	$(c_{-f})_i$		$(c_i)_p$	$=$	c_{-f}

Durch Vertauschung der Indices i und p, oder f und $-f$ geht jede Beziehung in eine andre über.

7 Nach 1 berührt der über $J C_p$ als Durchmesser beschriebene Kreis die Kurve c_i in C_i; die Normale derselben geht also durch den Mittelpunkt von $J C_p$. Da nun die Kurve c_i die Fusspunktkurve von c_p ist, so folgt:

Der Radiusvektor J C einer Kurve c wird durch die Normale der Fusspunktkurve c_f halbiert, welche zum entsprechenden Punkt C_f gehört.

8 Schneidet die Tangente, welche der Kurve c im Punkte C zukommt, die durch das Centrum J gehende Normale zum Radiusvektor $J C$ in T, so wird bekanntlich $J T$ die Subtangente genannt.

9 Da die Normale der Kurve c_p im Punkte C_p parallel dem Radiusvektor $J C$ läuft, welcher dem Punkte C der Kurve c zugehört, und da ferner C_p und C_f inverse Punkte sind, so folgt, dass die Normale der Kurve c_p im Punkte C_p die Polare des Endpunktes T, der Subtangente des Punktes C der Kurve c ist. Die Normalen einer Kurve umhüllen nun die Evolute*) derselben; es resultiert also der Satz:

V. In Bezug auf dasselbe Centrum J sind die Evolute $(c_p)_e$ der reciproken Polare c_p und der Ort c_t der Endpunkte T der Subtangenten einer Kurve c reciproke Polare.

$$(c_t)_p = (c_p)_e$$

---

*) Den Ort der Krümmungsmittelpunkte oder die Enveloppe der Normalen einer Kurve c wird die Evolute c_e und die Kurve, von welcher c selbst die Evolute ist, die Evolvente c_{-e} von c genannt.

§ 46. Es mögen nun einige Anwendungen der Sätze I—V folgen:

Die Enveloppe e von Kreisen k, welche durch einen festen Punkt J gehen, und deren Mittelpunkte C in einer gegebenen Kurve c liegen, ist zur Inversen $(c_p)_i$ *der Polarreciproken* c_p *oder zur Fusspunktkurve* c_f *der gegebenen Kurve positiv persp. ähnlich vom Aehnlichkeitsverhältnis 2*).*

Der Endpunkt C' des durch J gehenden Durchmessers des Kreises beschreibt eine zu c ähnliche Kurve c'. Wird nun zu der Figur in Bezug auf J als Centrum die inverse ermittelt, so gehen die Kreise in Gerade über, deren Enveloppe e_i die Inverse der gesuchten e der Kreise ist.

Die von den Durchmesserpunkten C' beschriebene Kurve c' geht in die von den inversen Punkten C_i' beschriebene Kurve c_i' über. Letztere ist die Fusspunktkurve der Enveloppe e_i der Geraden $[c_i' = (e_i)_f]$, oder die Enveloppe e_i ist die negative Fusspunktkurve von c_i' $[e_i = (c_i')_{-f}]$ und mithin gleich der Polaren von c' $[e_i = c_p']$. Folglich ergiebt sich die gesuchte Enveloppe e als Inverse der Polarreciproken oder als Fusspunktkurve von c' $[e = (c_p')_i = c_f']$. Da nun c' zu c perspektivisch ähnlich liegt, so folgt: $e \backsim (c_p)_i$ oder $e \backsim c_f$.

Dieser Satz kann noch einfacher wie folgt bewiesen werden: Die gesuchte Enveloppe ist der geom. Ort der Schnittpunkte E der unendlich benachbarten Kreise. Da die Centrale je zweier derselben eine Tangente der gegebenen Kurve c ist, so liegen die Schnittpunkte je zweier unendlich benachbarter Kreise symmetrisch in Bezug auf die durch ihre Mittelpunkte bestimmte Tangente. Da ferner der eine Schnittpunkt J ist, so beschreibt der andre E eine perspektivisch ähnliche Kurve vom Aehnlichkeitsverhältnis 2 zur Fusspunktkurve der gegebenen.

Es möge ein Beispiel Platz finden, welches zu späteren Untersuchungen in enger Beziehung steht:

Ist die gegebene Kurve ein Kreis c, so folgt als Fusspunktkurve c_f des Kreises c und mithin auch als Enveloppe e der Kreise

*) In Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. höheren ebenen Kurven p. 365 ist dieser Satz, jedoch nicht in der Vollständigkeit wie oben, nebst dem ersten Beweise angeführt. Er rührt nach a. O. von Stubbs her, Philosoph. Magazine, Bd. 23, p. 18.

k, je nachdem der Punkt J ausserhalb oder innerhalb des Kreises c oder auf demselben liegt, eine Pascalsche Schnecke mit oder ohne Knotenpunkt oder eine Cardioide.

5 In Bezug auf einen Kreis J ist die Polarreciproke eines Kreises c bekanntlich im Kegelschnitt, der das Centrum J zum Brennpunkt und die dem Mittelpunkte von c entsprechende Polare zur Direktrix hat, und zwar eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel, je nachdem der Punkt J ausserhalb oder innerhalb des Kreises c oder auf demselben liegt.

6 Es folgt daher aus vorstehenden Sätzen nach I:

Die Inverse eines Kegelschnittes in Bezug auf einen Brennpunkt als Inversionscentrum ist eine Pascalsche Schnecke mit oder ohne Knotenpunkt oder eine Cardioide, je nachdem der Kegelschnitt eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel ist.

7 Aus dem Satze V ergiebt sich:

Der Ort der Subtangente eines Kegelschnittes c in Bezug auf einen Brennpunkt J ist die Direktrix desselben; denn nach 4 ist die Polarreciproke von c ein Kreis c_p, seine Evolute $(c_p)_e$ mithin ein Punkt (sein Mittelpunkt), und nach V also c_t eine Gerade.

1 § 47. Bezeichnet

$$F(r\,,\varphi) = 0$$

die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten, so ist für den Pol als Inversionscentrum von der Potenz p, die Gleichung der inversen

$$F(\frac{p}{r}\,,\varphi) = 0.$$

2 Ist in Polarkoordinaten die Gleichung einer Kurve vom n^{ten} Grade in Bezug auf r

$$r^n + r^{n-1}f_1(\varphi) + r^{n-2}f_2(\varphi) + \ldots + r f_{n-1}(\varphi) + f_n(\varphi) = 0\;,$$

so ergiebt sich durch Vertauschung von r mit $\frac{p}{r}$ als Gleichung der Inversen

$$\frac{p^n}{r^n} + \frac{p^{n-1}}{r^{n-1}}f_1(\varphi) + \ldots + \frac{p}{r}f_{n-1}(\varphi) + f_n(\varphi) = 0\,.$$

Wird zur Abkürzung

$$\frac{p^m f_{n-m}(\varphi)}{f_n(\varphi)} = f_m[\varphi]$$

gesetzt, so geht die Gleichung der inversen Kurve über in

$$r^n + r^{n-1}f_1[\varphi] + \ldots + r f_{n-1}[\varphi] + f_n[\varphi] = 0\,.$$

Sie ist ebenfalls in Bezug auf r vom n^{ten} Grade. Wird nun der Grad einer Kurvengleichung in r der Kreisgrad der Kurve genannt*), so folgt:

Durch Inversion wird der Kreisgrad einer Kurve nicht verändert.

Ist die Gleichung einer Kurve in rechtwinkligen Koordinaten gegeben, so ist in Folge der quadratischen Substitution $r^2 = x^2 + y^2$ die Inverse einer Kurve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen $2n^{\text{ter}}$ Ordnung; doch kann in besonderen Fällen die Inverse auch von derselben oder von niedrigerer Ordnung sein als die gegebene Kurve. Z. B. ist die Inverse eines Kegelschnittes im Allgemeinen eine Kurve vierter Ordnung, im Falle des Kreises dagegen wieder ein Kreis oder eine Gerade.

§ 48. Besonders einfach gestaltet sich die Ermittlung der Inversen einer Kurve, wenn die Gleichung derselben explicite in Bezug auf r, also in der Form

$$r = [f(\varphi)]$$

dargestellt werden kann; die Inverse ist dann von der Form

$$r = p \cdot [f(\varphi)]^{-1}.$$

Als Beispiel hierzu möge die Kurvenfamilie

$$r^{\mathrm{m}} = a^{\mathrm{m}} \cos \mathrm{m}\varphi \qquad \text{oder} \qquad r = a \cos^{\mathrm{n}}\left(\frac{\varphi}{n}\right)$$

dienen. Die Inverse ist in diesem Falle von derselben Form. Bezeichnet p die Potenz der Inversion und wird $\frac{p}{a} = b$ gesetzt, so sind

$$r = a \cos^{\mathrm{n}}\left(\frac{\varphi}{n}\right) \qquad \text{und} \qquad r = b \cos^{-\mathrm{n}}\left(\frac{\varphi}{-n}\right)$$

inverse Kurven. Im Besonderen ergeben sich hieraus als inverse Kurven

für $n = 1$

$$r = a \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad r = \frac{b}{\cos\varphi},$$

d. h. ein Kreis, welcher durch das Centrum geht, und eine Gerade;

für $n = 2$

$$r = a \cos^2 \frac{\varphi}{2} \qquad \text{und} \qquad r = \frac{b}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

---

*) Nach Gino Loria, *die hauptsächlichsten Theorien der Geom.* 1888, p. 82, Anmerk. 9 vergleiche über die auf den Begriff der Inversion gegründete Einteilung der ebenen Kurven Johnson, *Analyst* 4.

d. h. eine *Cardioide*, welche das Centrum zur Spitze, und eine *Parabel*, welche das Centrum zum Brennpunkt hat (§ 46,3);

$$\text{für } n = \tfrac{1}{2}$$

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi \qquad \text{und} \qquad r^2 = \frac{b^2}{\cos 2\varphi}$$

d. h. eine *Lemniscate* und eine *gleichseitige Hyperbel*, beide für das Inversionscentrum als Mittelpunkt.

Eine Kurve

$$r = f_1(\varphi)$$

habe die Eigenschaft, dass, q und ε als Konstante vorausgesetzt,

$$f_1(\varepsilon + \varphi) \cdot f_1(\varepsilon - \varphi) = q \qquad \text{oder} \qquad f_1(\varphi) \cdot f_1(2\varepsilon - \varphi) = q$$

ist. In Bezug auf p als Potenz ist dann

$$r = \frac{p}{f_1(\varphi)} = f_2(\varphi) \ ,$$

die Gleichung der Inversen, und es besteht hiernach die Relation

$$f_1(\varphi) \cdot f_2(\varphi) = p \ ,$$

welche mit obiger Festsetzung

$$f_1(\varphi) \cdot f_1(2\varepsilon - \varphi) = q \ ,$$

durch Division

$$f_2(\varphi) = \frac{p}{q} f_1(2\varepsilon - \varphi)$$

ergiebt. Wird $\frac{p}{q} = \mu_{21}$ gesetzt, so folgt als Gleichung der inversen

$$r = \mu_{21} \cdot f_1(2\varepsilon - \varphi) \ .$$

Unter obiger Voraussetzung ist also die Inverse eine *gegenwendig ähnliche* Kurve*).

Als Beispiel folge die Gleichung der logarithmischen Spirale

$$r = a\, e^{m\varphi} \ .$$

Dieselbe erfüllt obige Bedindung für jedes beliebige ε. Wird zur Abkürzung wieder $a \cdot b = p$ gesetzt, so ergeben sich als inverse Kurven von der Potenz p die beiden gegenwendig ähnlichen logarithmischen Spiralen

$$r = a\, e^{m\varphi} \qquad \text{und} \qquad r = b\, e^{-m\varphi} \ .$$

§ 49. Fällt eine Kurve mit ihrer perspektivisch inversen zusammen, so wird dieselbe (§ 22,2) *perspektivisch selbstinvers* oder *anallagmatisch* genannt.

---

*) Später werden die Bedingungen, unter welchen die inversen Kurven den ursprünglichen gegenwendig ähnlich sind, eingehender untersucht werden

Eine perspektivisch selbstinverse Kurve wird von jedem Inversionsstrahl in einer geraden Anzahl von Punkten geschnitten. Ihre Gleichung in Polarkoordinaten (r, φ) ist daher, für das Inversionscentrum als Pol, in Bezug auf r im allgemeinen vom $2n^{\text{ten}}$ Grade.

Bedeutet $F(\varphi)$ eine beliebige Funktion von φ und $p = \pm k^2$ die Potenz des Inversionskreises, so stellt

$$r^2 - r\,F(\varphi) + p = o$$

die Gleichung einer perspektivisch selbstinversen Kurve dar, die in Bezug auf r vom zweiten Grade ist. Denn sind r_1 und r_2 für einen beliebig gewählten Wert von $F(\varphi)$ die beiden Wurzeln der Gleichung, so erfüllen dieselben die inverse Beziehung $r_1 \,.\, r_2 = p$.

Ist die Gleichung der selbstinversen Kurve für das Inversionscentrum als Pol in Bezug auf r vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, so zerfällt dieselbe in n Gleichungen von vorstehender Form.

Sind von der in r quadratischen Gleichung der selbstinversen Kurve für ein beliebig gewähltes φ die Wurzeln

$$r_1 = \tfrac{1}{2}\left[F(\varphi) + \sqrt{[F(\varphi)]^2 - 4p}\right] \equiv f_1(\varphi)$$

und

$$r_2 = \tfrac{1}{2}\left[F(\varphi) - \sqrt{[F(\varphi)]^2 - 4p}\right] \equiv f_2(\varphi),$$

welche den Bedingungen

$$r_1 + r_2 = F(\varphi) \qquad \text{und} \qquad r_1 \,.\, r_2 = p$$

genügen, so stellen die Gleichungen

$$r = f_1(\varphi) \qquad \text{und} \qquad r = f_2(\varphi)$$

die beiden perspektivisch inversen Teile der selbstinversen Kurve dar. Dieselben können jedoch im Allgemeinen nicht als selbstständige Kurven gelten, da die Gleichung eines jeden Kurventeils, sobald sie in Bezug auf $F(\varphi)$ rational gemacht wird, wieder die ursprüngliche Gleichung der selbstinversen Kurve liefert.

Besondere Beachtung dagegen verdient der Specialfall, in welchem die Discriminante

$$[F(\varphi)]^2 - 4p$$

ein vollständiges Quadrat darstellt.

Es mögen einige Beispiele folgen:

Ist

$$r^2 - \frac{a + b\,\varphi^2}{\varphi}\,r + p = 0$$

die Gleichung der selbstinversen Kurve, so zerfällt dieselbe für $a \,.\, b = p$ in die inversen Kurven

$$r = \frac{a}{\varphi} \quad \text{und} \quad r = b \,.\, \varphi \ ,$$

d. h. in eine hyperbolische und eine Archimedische Spirale.

Ist die selbstinverse Kurve von der Form

$$r^2 - \left[a \cos^{\mathrm{n}}\left(\frac{\varphi}{n}\right) + b \cos^{-\mathrm{n}}\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right] r + p = 0 \ ,$$

so zerfällt dieselbe für $a \,.\, b = p$ in die inversen Kurven

$$r = a \cos^{\mathrm{n}}\left(\frac{\varphi}{n}\right) \quad \text{und} \quad r = b \cos^{-\mathrm{n}}\left(\frac{\varphi}{n}\right)$$

Als inverse Kurven ergeben sich z. B. hieraus für $n = \frac{1}{2}, 1, 2$ diejenigen, welche schon in § 48,3—5 behandelt worden sind.

Besteht, μ und ε als konstante Grössen vorausgesetzt, zwischen den Funktionen $f_1(\varphi)$ und $f_2(\varphi)$ der Zusammenhang

$$f_2(\varepsilon + \varphi) = \mu_{21} \, f_1(\varepsilon - \varphi)$$

und ist selbstverständlich die Bedingung $f_1(\varphi) \,.\, f_2(\varphi) = p$ erfüllt, so tritt der eigentümliche Fall ein, dass die beiden inversen Kurven, in welche die selbstinverse zerfällt, gegenwendig ähnlich für μ_{21} als Aehnlichkeitsverhältnis und also für $\mu_{21} = 1$ symmetrisch sind.

Die Gleichung

$$r^2 - (a\, e^{\mathrm{m}\varphi} + b\, e^{-\mathrm{m}\varphi})\, r + p = 0$$

zerfällt z. B. in zwei gegenwendig ähnliche logarithmische Spiralen. (Vergleiche § 48,7).

§ 50. Die allgemeine Gleichung

$$r^2 - r\, F(\varphi) + p = 0$$

einer selbstinversen Kurve, welche in r vom 2 ten Grade ist, lässt sich auch in der Form

$$\frac{r}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{r} - \frac{F(\varphi)}{\sqrt{p}} = 0$$

schreiben. Werden hierin die abgekürzten Bezeichnungen

$$R = \frac{r}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{r} \quad \text{und} \quad F = -\frac{F(\varphi)}{\sqrt{p}}$$

eingeführt, so nimmt dieselbe die einfache Gestalt

$$R + F = 0$$

an.

Da nun ein Produkt von n quadratischen Gleichungen vorstehender Form nach § 49,3 die Gleichung einer selbstinversen

Kurve $2n^{\text{ten}}$ Grades in r oder (was dasselbe ist) n^{ten} Grades in R darstellt, so wird die allgemeine Gleichungsform derselben

$$R^n + V_1 R^{n-1} + V_2 R^{n-2} + \ldots V_n = 0$$

sein, wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n &= V_1 \\ F_1 F_2 + F_1 F_3 + \ldots + F_{n-1} F_n &= V_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_1 F_2 F_3 \ldots F_n &= V_n \end{aligned}$$

gesetzt wird.

Als Beispiel folge die Cassinische Kurve. Ihre Gleichung in Polarkoordinaten in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Pol ist bekanntlich

$$r^4 - 2c^2 \cos 2\varphi \cdot r^2 + c^4 - m^4 = 0$$

Dieselbe lässt sich, wenn

$$p = \sqrt{c^4 - m^4} \qquad \text{und} \qquad R = \frac{r}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{r}$$

gesetzt wird, schreiben:

$$R^2 - \frac{2}{p}(p + c^2 \cos 2\varphi) = 0 \ .$$

Hieraus folgt, dass die Kurve für ein reelles p oder $c > m$, in welchem Falle sie bekanntlich aus zwei konjugierten, den Mittelpunkt ausschliessenden Ovalen besteht, perspektivisch selbstinvers ist.

Ist $c < m$, besteht die Kurve also aus einem den Mittelpunkt einschliessenden Oval, so geht dieselbe durch Inversion von der Potenz $\sqrt{m^4 - c^4}$ in eine kongruente, jedoch um 90° gedrehte Kurve über. (Für $c = m$ vergleiche § 48,5.)

§ 51. *Bezeichnen in Bezug auf denselben Inversionskreis von der Potenz* p

$$S' \equiv R^n + V_1' R^{n-1} + V_2' R^{n-2} + \ldots = 0$$

und

$$S'' \equiv R^n + V_1'' R^{n-1} + V_2'' R^{n-2} + \ldots = 0$$

die Gleichungen zweier selbstinverser Kurven, so stellt

$$S \equiv S' - \nu S'' = 0$$

für irgend einen Wert von ν *die Gleichung einer in Bezug auf denselben Inversionskreis ebenfalls selbstinversen Kurve dar, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kurven geht.*

Dieser Satz ist leicht zu erweisen: Die Kurve $S = 0$ ist

selbstinvers, da S ebenso wie S' und S'' eine ganze Funktion von R ist. Die Kurve geht ferner durch die Schnittpunkte der gegebenen, da $S' = 0$ und $S'' = 0$ gleichzeitig ihre Gleichung $S = 0$ befriedigen.

Die Gesamtheit der Kurven $S = 0$, welche einen Parameter ν enthalten, bilden einen Kurvenbüschel, zu welchem auch die Kurven $S' = 0$ und $S'' = 0$ gehören, denn für $\nu = 0$ bez. $\nu = \infty$ geht S in S' bez. S'' über.

Sind die gegebenen Kurven vom n^{ten} Grade in Bezug auf R, so ist es im Allgemeinen auch die Kurve $S = 0$; nur in dem Falle $\nu = 1$ ist sie in Bezug auf R vom $n-1^{ten}$ Grade. Hieraus folgt speciell:

Sind die beiden gegebenen Kurven nur vom ersten Grade in Bezug auf R, so degeneriert die Kurve $S \equiv S' - S'' = 0$ in die Geraden, welche vom Inversionscentrum aus durch die Schnittpunkte der gegebenen Kurven gehen. Z. B. resultiert für zwei Kreise ihre Potenzaxe.

§ 52. Es sollen nun selbstinverse Gebilde untersucht werden, welche mehrere Inversionskreise besitzen. Dass es solche giebt, möge zuvor an einigen einfachen Beispielen gezeigt werden:

Ein Kreis besitzt unendlich viele positive und negative Inversionskreise, in Bezug auf welche er eine selbstinverse Kurve ist, nämlich (nach § 26) jeden Kreis der Bündel von positiven oder negativen Inversionskreisen, welche ihn zum Ordnungskreise haben.

Zwei Kreise geben, als eine Kurve vierter Ordnung aufgefasst, das Beispiel einer selbstinversen Kurve, welche ausser den beiden Inversionskreisen, die ihren Aehnlichkeitspunkten zugehören, noch jeden Kreis des durch sie bestimmten orthogonalen Kreisbüschels (§ 33,5) zum Inversionskreis haben.

Die selbstinversen Gebilde mit mehreren Inversionskreisen lassen sich stets in Bezug auf einen Schnittpunkt zweier positiver Inversionskreise (§ 39,4) in ein symmetrisches Gebilde transformieren, und es können also umgekehrt die Beziehungen der Inversionskreise (wenigstens der positiven) mehrfach selbstinverser Figuren aus denen der symmetrischen hergeleitet werden.

Für symmetrische Figuren gilt nun ein wichtiger Satz, den schon Möbius wie folgt ausgesprochen hat:

„Ist ein System von Punkten in Bezug auf zwei Basen zugleich

*symmetrisch, so sind immer auch noch alle diejenigen Elemente, welche aus der einen Basis durch die andre erzeugt werden, Basen des Systems, und zwar von derselben Art wie die Basis, aus der sie erzeugt wurden".**)

Schneiden sich zwei Symmetrieaxen unter dem Winkel $\frac{m}{n} 180^0$, so sind n Symmetrieaxen vorhanden, welche einen regelmässigen n-Strahl bilden, d. h. sich unter $2n$ gleichen Winkeln $\alpha = \frac{180^0}{n}$ schneiden. In Bezug auf jede Symmetrieaxe bilden die übrigen $n-1$ ein symmetrisches Gebilde.

Wird nun eine solche symmetrische Figur durch Inversion transformiert, so folgt aus vorstehenden Sätzen nach § 35:

Hat eine selbstinverse Kurve zwei positive Inversionskreise, welche sich unter einem Winkel $\frac{m}{n} 180^0$ schneiden, so besitzt sie deren noch $n-2$, und die n vorhandenen positiven Inversionskreise bilden einen Büschel mit zwei reellen Schnittpunkten, in welchen die Tangenten oder Radien einen regelmässigen n-Strahl bilden.

Im allgemeinen schneidet jeder Kreis des Büschels, welches dem der Inversionskreise orthogonal ist, die selbstinverse Kurve in einem Vielfachen von $2n$ Punkten. *Jede Gruppe von $2n$ Punkten ~~bildet zwei regelmässige n-Ecke und~~ ist selbstinvers in Bezug auf jeden der n Inversionskreise* (§ 38).

§ 53. Wie aus dem Folgenden hervorgeht, erschöpft das Büschel der Inversionskreise, die Anzahl derselben, welche eine selbstinverse Kurve haben kann, noch nicht; sondern es können noch ein positiver oder ein negativer oder beide hinzukommen. Die Möglichkeit ihres Vorhandenseins leuchtet wieder durch Betrachtung symmetrischer Figuren ein.

Eine symmetrische Figur kann in Bezug auf einen Kreis, welcher das System der Axen rechtwinklig schneidet, positiv oder negativ selbstinvers sein. Soll dieser Kreis sowohl ein positiver als auch ein negativer Inversionskreis sein, so muss die symmetrische Figur notwendiger Weise eine gerade Anzahl von Symmetrieaxen besitzen. Und umgekehrt folgt:

Besitzt eine symmetrische Figur von einer ungeraden Anzahl von Symmetrieaxen einen Kreis, in Bezug auf welchen sie selbst-

*) Möbius, *Theorie der symmetrischen Figuren,* im Nachlass; Ges. W. Bd. II. p. 610.

invers ist, so kann derselbe entweder ein positiver oder ein negativer Inversionskreis sein (aber nicht beides zugleich). Ist derselbe negativ, so schneidet ihn die Kurve auf den Winkelhalbierenden der Symmetrieaxen.

4 Besitzt eine symmetrische Figur von einer g e r a d e n Anzahl von Symmetrieaxen einen Kreis, in Bezug auf welchen sie selbstinvers ist, so muss derselbe sowohl ein positiver als auch ein negativer Inversionskreis sein.

Aus vorstehenden Sätzen ergeben sich nun durch inverse Transformationen nach § 35 die folgenden:

5 *Eine selbstinverse Kurve, welche einen Inversionskreisbüschel von u n g e r a d e r Anzahl besitzt, kann nur noch e i n e n, entweder positiven oder negativen Inversionskreis haben;* in Bezug auf denselben ist das Inversionskreisbüschel selbstinvers.

6 *Eine selbstinverse Kurve, welche einen Inversionskreisbüschel von g e r a d e r Anzahl besitzt, kann nur noch z w e i Inversionskreise, einen positiven und zugleich auch einen negativen haben.* In Bezug auf jeden derselben ist das Inversionskreisbüschel selbstinvers.

Es muss besonders darauf aufmerksam gemacht werden, dass diese beiden Inversionskreise nicht mehr, (wie in Satz 4) in e i n e n zusammenfallen, sondern, dass der positive von beiden negativ selbstinvers in Bezug auf den negativen ist.

1 § 54. Besondere Beachtung verdient der folgende Fall:

Besteht das Büschel nur aus zwei Inversionskreisen, welche sich also dann rechtwinklig schneiden, so resultiert ein Inversionskreissystem von vier „orthogonalen" Kreisen. Die drei positiven Inversionskreise schneiden sich paarweise rechtwinklig und sind negativ selbstinvers in Bezug auf den negativen Inversionskreis, dessen Mittelpunkt das Potenzcentrum derselben ist.

Es können in diesem Falle je zwei der positiven Inversionskreise als das Büschel aufgefasst werden.

2 Der Mittelpunkt des negativen Inversionskreises ist der Höhenschnittpunkt des stets spitzwinkligen Dreiecks, welches die Mittelpunkte der drei positiven Inversionskreise zu Ecken hat.

Da die Inversionskreise zu einander orthogonal sind, so folgt:

3 *In Bezug auf jeden der Inversionskreise bilden die Mittelpunkte der übrigen drei ein Polardreieck,* d. h. ein Dreieck, dessen Seiten die Polaren der Ecken sind.

Geht von den drei positiven Inversionskreisen einer in eine Gerade über, so schneiden sich die beiden übrigen mit dem negativen in zwei Punkten, und die drei nach einem Schnittpunkt gezogenen Radien bilden daher Katheten und Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks.

Die Potenzen der vier Inversionskreise sind nicht unabhängig von einander, sondern durch je drei ist die vierte bestimmt. Um zu einer Relation zwischen denselben zu gelangen, empfiehlt es sich, von dem zuletzt behandelten Specialfall auszugehen:

Da, wie schon erwähnt, die Radien r und r'' der beiden positiven Inversionskreise die Katheten, und der Radius r' des negativen die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks sind, so folgt, wenn die Fläche desselben zweimal durch diese Grössen ausgedrückt wird:

$$r\, r'' = r' \sqrt{(r)^2 + (r'')^2}\ .$$

Wird diese Gleichung durch das Produkt der drei Radien dividiert und quadriert, so resultiert

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{r'}\right)^2 + \left(\frac{1}{r''}\right)^2 = 0,$$

und es findet also zwischen den drei Potenzen die elegante Beziehung statt:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} = 0\ .$$

Diese Relation kann man auch in folgender Weise ermitteln: Werden die Mittelpunkte $J\ J'\ J''$ der drei Inversionskreise der Kürze wegen durch ihre Indices angedeutet, so ergiebt sich aus

$$\overline{01} + \overline{12} + \overline{20} = 0$$

durch Division durch das Produkt der drei Strecken

$$\frac{1}{\overline{20}\,.\,\overline{01}} + \frac{1}{\overline{01}\,.\,\overline{12}} + \frac{1}{\overline{12}\,.\,\overline{20}} = 0\ .$$

Da nach 4 diese Strecken die Segmente und Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sind, so folgt:

$$\overline{01}\,.\,\overline{02} = p\ , \qquad \overline{10}\,.\,\overline{12} = p'\ , \qquad \overline{20}\,.\,\overline{21} = p''$$

und hieraus die obige Beziehung.

Die Relation der Potenzen für den allgemeinen Fall von vier orthogonalen Inversionskreisen ergiebt sich nun durch mehrmalige Anwendung des Satzes 7.

Sind $r\ r''\ r'''$ die Radien der drei positiven Inversionskreise, r' der Radius des negativen, und wird r_0 der Radius des Kreises

genannt, welcher die gemeinschaftliche Sehne der Inversionskreise von den Radien r und r'' zum Durchmesser hat, so bilden r r'' die Katheten und r_0 die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks und nach dem Vorigen 6 ist also:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{r''}\right)^2 = 0 \ .$$

In gleicher Weise bilden r_0 r''' die Katheten und r' die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks; es ist daher ferner:

$$\left(\frac{1}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{r'}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'''}\right)^2 = 0 \, .$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$+\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{r'}\right)^2 + \left(\frac{1}{r''}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'''}\right)^2 = 0 \, ,$$

und nach Einführung der Potenzen, von welchen p' negativ ist, folgt:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \frac{1}{p'''} = 0 \, . \tag{10}$$

Die Summe der reciproken Potenzen von vier orthogonalen Inversionskreisen ist gleich Null.

Degeneriert ein Inversionskreis z. B. J''' in eine Gerade, so wird seine Potenz $p''' = \infty$, und es ergiebt sich die Specialformel 7.

1 § 55. Das einfachste Beispiel eines selbstinversen Gebildes, welches vier orthogonale Inversionskreise besitzt, ist ein System von vier Punkten eines Kreises oder einer Geraden.

Im letzteren Falle ist dieses System zugleich in Bezug auf die drei im Endlichen liegenden Inversionskreismittelpunkte perspektivisch ähnlich, und in dieser Eigenschaft bereits in § 17 behandelt worden.

2 Hier sollen die inversen Beziehungen erörtert und die metrischen Relationen aufgestellt werden, welche für die weiteren Untersuchungen von Bedeutung sind.

Ein System von vier Punkten P_1 P_2 P_3 P_4 einer Geraden und die 6 Kreise, welche je zwei der Punkte zu Endpunkten eines Durchmessers haben, besitzen ausser der Geraden selbst noch 3 Inversionskreise, in Bezug auf welche sie als ein perspektivisch selbstinverses Gebilde aufgefasst werden können.

Werden wie in § 17 die Kreise (nicht Kreismittelpunkte) mit c, die Punkte P der Kürze wegen nur durch ihre Indices, die Inversionscentra mit J und die Potenzen mit p bezeichnet, so lassen sich die perspektivisch selbstinversen Systeme wie folgt übersichtlich darstellen:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 & c'_1 & c''_1 & & & J' \\ 2 & 4 & c'_2 & c''_2 & c_1 & c_2 & J'' \end{matrix}\right\} \oplus J;\quad p = +(r)^2,$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & c_1 & c''_1 & & & J \\ 3 & 4 & c_2 & c''_2 & c'_1 & c'_2 & J'' \end{matrix}\right\} \ominus J';\quad p' = -(r')^2,$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & c_1 & c'_1 & & & J \\ 4 & 3 & c_2 & c'_2 & c''_1 & c''_2 & J' \end{matrix}\right\} \oplus J'';\quad p'' = +(r'')^2.$$

Nach § 17,4 haben die über den Centralen der drei Kreispaare als Durchmesser beschriebenen Kreise e denselben Mittelpunkt E. 3

Es mögen die Radien der 6 Kreise mit c, die Entfernungen ihrer Mittelpunkte C von E mit e und die Entfernungen der 3 Inversionscentra J von E mit s bezeichnet werden.

Zwischen den Radien der drei Kreispaare und den Entfernungen ihrer Mittelpunkte vom Punkte E bestehen dann folgende, leicht zu ermittelnde Relationen:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= c_1' - c_2' = 2e'', \\ c_1 + c_2 &= c_1'' - c_2'' = 2e', \\ c_1' + c_2' &= c_1'' + c_2'' = 2e, \end{aligned} \qquad 4$$

und

$$\begin{matrix} c_1 = e' + e'', & c_1' = e + e'', & c_1'' = e + e', \\ c_2 = e' - e'', & c_2' = e - e'', & c_2'' = e - e'. \end{matrix} \qquad 5$$

Eine einfache Beziehung zwischen den Entfernungen s und e der Mittelpunkte J und C von E ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Satze (§ 20,4), dass der Aehnlichkeitskreis zweier Kreise den über ihrer Centrale als Durchmesser beschriebenen Kreis rechtwinklig schneidet, also in Bezug auf denselben positiv selbstinvers ist. Die Relationen für die e sind 6

$$e^2 = s' s'', \quad e_,^2 = s s'', \quad e_{,,}^2 = s s'. \qquad 7$$

Wird das Produkt je zweier durch die dritte dividiert, so folgt

$$s = \frac{e' e''}{e}, \quad s' = \frac{e'' e}{e'}, \quad s'' = \frac{e e'}{e''}. \qquad 8$$

Das Produkt der drei Gleichungen führt zu der Beziehung

$$e e' e'' = s s' s''. \qquad 9$$

Die drei Strecken e sind von einander unabhängig, dasselbe gilt von den s. Zwischen den Potenzen p dagegen besteht die Relation 7.

Für die Potenzen p ergeben sich nach § 53,1 Beziehungen zu 10

den s, welche sich mit Hilfe der Gleichungen 8 auch auf die e ausdehnen lassen. Die Beziehungen lauten:

$$p = (s - s_,)(s - s_{,,}) = \frac{(e_,^2 - e^2)(e_{,,}^2 - e^2)}{e^2},$$

$$p' = (s_, - s_{,,})(s_, - s) = \frac{(e_{,,}^2 - e_,^2)(e^2 - e_,^2)}{e_,^2},$$

$$p'' = (s_{,,} - s)(s_{,,} - s_,) = \frac{(e^2 - e_{,,}^2)(e_,^2 - e_{,,}^2)}{e_{,,}^2}.$$

1 Aus 8 und 10 folgen noch:

$$p - s^2 = + e^2 - e_,^2 - e_{,,}^2,$$
$$p' - s_,^2 = - e^2 + e_,^2 - e_{,,}^2,$$
$$p'' - s_{,,}^2 = - e^2 - e_,^2 + e_{,,}^2.$$

2 Ueber die Anordnung der Punkte des Systems und die Grössenverhältnisse ihrer gegenseitigen Entfernungen ist unter der Voraussetzung, dass

$$P_1 P_2 > P_3 P_4$$

ist, Folgendes zu bemerken:

Für die e, s und p bestehen die Ungleichungen:

$$e > e' > e'', \qquad s < s' < s'',$$
$$p' < p < p''.$$

3 Die Lage des Punktes E zu den Punkten P ist von den Grössenverhältnissen der c, mithin auch der e abhängig, die Lage der J dagegen nicht. Die Anordnung der Punkte ist

für $e > e' + e''$

$$P_1 \; P_2 \; E \; J \; J' \; P_3 \; P_4 \; J'',$$

für $e < e' + e''$

$$P_1 \; E \; P_2 \; J \; J' \; P_3 \; P_4 \; J'',$$

für $e = e' + e''$ fällt der Punkt E auf P_2. Da nun $2e > e' + e''$ ist, so liegt E immer zwischen C_1 und J.

§ 56. Ein System von vier Punkten $P_1 \, P_2 \, P_3 \, P_4$ eines Kreises i''' und die 6 Kreise, welche in je zweien der Punkte den Kreis i''' rechtwinklig schneiden, besitzen ausser dem Kreise i''' selbst noch 3 Inversionskreise, in Bezug auf welche sie als ein perspektivisch selbstinverses Gebilde aufgefasst werden können.

2 Zwischen den Potenzen der vier Inversionskreise besteht die Relation § 54,10.

3 Die 6 Mittelpunkte C der Kreise c liegen zu je drei in vier Geraden g, den Tangenten des Kreises i''', welche den Punkten P zugehören.

Da die 6 Mittelpunkte C also die Ecken eines vollständigen Vierecks sind, so folgt nach dem Gauss-Bodenmiller'schen Satze*):

Die Mittelpunkte $E\ E'\ E''$ *der über den Centralen der drei Kreispaare* c *als Durchmesser beschriebenen Kreise* $e\ e'\ e''$ *liegen in einer Geraden. Die drei Kreise* e *bilden einen Büschel* und schneiden den Kreis rechtwinklig, welcher durch die drei Schnittpunkte der Diagonalen (d. h. der Centralen der Kreispaare c) geht.

Da die vier Geraden g den Kreis i''' berühren, so lässt sich noch beweisen:

Die Gerade $E\ E'\ E''$ geht durch J''', der durch die Schnittpunkte der Diagonalen gelegte Kreis schneidet den Kreis i''' rechtwinklig, und die Diagonalen bilden in Bezug auf i''' ein Polardreieck.

§ 57. In § 26 sind die Kreisbündel näher betrachtet worden. Dieselben bestehen in der Gesamtheit der Kreise, welche in Bezug auf einen Ordnungskreis positive oder negative Inversionskreise oder selbstinverse Kreise sind und bilden lineare Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen.

In gleicher Weise sollen jetzt lineare Mannigfaltigkeiten von einer Dimension untersucht werden, und zwar die sogenannten Kreisbüschel, welche in der Gesamtheit der Kreise bestehen, die zwei Kreisbündeln gemeinsam sind. Aus den drei verschiedenen Kreisbündeln ergeben sich durch Kombination von je zwei derselben sechs verschiedene Kreisbüschel, von denen die unter I. und II. angeführten schon öfter in vorliegender Abhandlung einfach als „Kreisbüschel" verwendet worden sind**).

---

*) Newton, *Phil. nat. princ. math. Lib. I. lemma XXV.*

Poncelet, *Propr. proj. d. Figures,* 1865 T. I. Sect. II, Chap. I, p. 83 art. 164 u. Sect. III. Chap. II. p. 213 art. 398.

Möbius, *Zwei rein geom. Beweise des Bodenmiller'schen Satzes,* Ber. üb. d. Verh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Kl. 1854, Bd. 6, p. 87, od. Ges. W. Bd. II. p. 239.

Obiger Satz müsste hiernach eigentlich der Newton-Bodenmiller'sche heissen, da der erste Teil desselben nach Baltzer, *Elem. de Math.* p. 58, erst 1810 von Gauss bemerkt worden ist.

**) Die Kreisbüschel sind vielfach behandelt worden. Von der reichhaltigen Literatur (vergl. die Anm. d. § 19) seien nur erwähnt:

L. Gaultier, *Memoire sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions et une sphère déterminée par quatre*

Die Radien der beiden Ordnungskreise seien k_1 und k_2 und die Entfernung der Mittelpunkte $2\,s$.

Werden die Büschel in analoger Weise dargestellt, wie es in § 26 mit den Kreisbündeln geschehen, so ergiebt sich folgende Uebersicht:

2

II.	I.	III.
$\mathbf{B}\ominus_1\ominus_2$ oder $\mathbf{B}_{N_1\,N_2}$	$\mathbf{B}\oplus_1\oplus_2$ oder $\mathbf{B}_{P_1\,P_2}$	$\mathbf{B}\,\Phi_1\,\Phi_2$ oder $\mathbf{B}_{M_1\,M_2}$
Büschel der Kreise, welche in Bezug auf die Ordnungskreise		
negative Inversionskreise sind.	*orthogonale Kreise, d. h., positiv selbstinverse oder positive Inversionskreise sind.*	*negativ selbstinverse Kreise sind.*

3 Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Büschelkreise ist die in der Entfernung

$-\dfrac{k_1^2 - k_2^2}{4\,s}$	$+\dfrac{k_1^2 - k_2^2}{4\,s}$

vom Mittelpunkte E der Centrale der Ordnungskreise auf derselben errichtete Normale oder

die Potenzaxe der Ordnungskreise. Schneiden sich dieselben, so ist nur der innerhalb (II.) | ausserhalb (I.) der Ordnungskreise sich erstreckende Teil der Potenzaxe der Mittelpunktsort von den Büschelkreisen.	die in Bezug auf E symmetrische Gerade zur Potenzaxe der Ordnungskreise.

4

Das Büschel existiert also nur, wenn die Ordnungskreise sich schneiden.	Das Büschel existiert immer. (Die Kreise des Büschels II können als imaginäre Kreise des Büschels I aufgefasst werden.)	Das Büschel existiert immer.

---

conditions. Journal de l'école polytechnique. 1812. 16ème Cahier, Tome VI, pag. 136—139.

John Casey, *On coaxial circles,* the quarterly Journal of pure and applied Mathematics, 1862, Vol. V.

Fr. G. Affolter, *Zur Geometrie des Kreises und der Kugel,* Archiv d. Math. u. Physik 1875, Teil 57, p. 1.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Die Enveloppe des Büschels ist eine Ellipse, welche die gemeinschaftliche Sehne der Ordnungskreise zur kleinen Axe hat, und deren grosse Axe sich zu ihr wie $\sqrt{2} : 1$ verhält.*)</td>
<td colspan="2">Das Büschel erstreckt sich über die ganze Ebene. Sämmtliche Büschelkreise schneiden sich in zwei</td>
</tr>
<tr>
<td>reellen oder imaginären Punkten, je nach. Dem die Ordnungs-Kreise sich in imag. od. reellen Punkten schneiden.</td>
<td>stets reellen Punkten. Das Büschel kann also auch als Büschel I. gelten.</td>
</tr>
</table>

Das Büschel hat ausser den beiden gegebenen Ordnungskreisen noch unzählige andre. Die Gesamtheit derselben bildet

ein Büschel I mit reellen Schnittpunkten.	das „orthogonale" Büschel I (Vergl. § 33.)	ein Büschel II.

IV.	IV.
$\mathbf{B}\,\oplus_1\,\phi_2$ oder $\mathbf{B}_{P_1 M_2}$	$\mathbf{B}\,\phi_1\,\oplus_2$ oder $\mathbf{B}_{M_1 P_2}$

Büschel der Kreise, welche in Bezug auf den einen Ordnungskreis orthogonale und in Bezug auf den andern negativ selbstinverse Kreise sind.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Büschelkreise ist die in der Entfernung

$-\dfrac{k_1^2 + k_2^2}{4\,s}$	$+\dfrac{k_1^2 + k_2^2}{4\,s}$

vom Mittelpunkte E der Centrale auf derselben errichtete Normale.

Die Mittelpunktsorte der beiden konjugierten Büschel sind also in Bezug auf E symmetrisch.

Das Büschel existiert immer und erstreckt sich über die ganze Ebene.

Sämmtliche Büschelkreise schneiden sich stets in zwei reellen Punkten.

Das Büschel hat ausser den gegebenen Ordnungskreisen noch unzählige andre. Die Gesamtheit der einen bilden einen Büschel I, die der andern einen Büschel II.

V.	V.
$\mathbf{B}\,\oplus_1\,\ominus_2$ oder $\mathbf{B}_{P_1\ N_2}$	$\mathbf{B}\,\ominus_1\,\oplus_2$ oder $\mathbf{B}_{N_1\ P_2}$

---

*) Steiner, *Vorgelegte Aufgaben und Lehrsätze,* Crelle Journ. Bd. III. p. 208; 2. Lehrs., Ges. W., Bd. I., p. 176.

Büschel der Kreise, welche in Bezug auf einen der Ordnungskreise orthogonale und in Bezug auf den andern negative Inversionskreise sind.

13 Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Büschelkreise ist der um den Mittelpunkt E der Centrale der Ordnungskreise $k_1 > k_2$ beschriebene Kreis e vom Radius

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(k_1{}^2 + k_2{}^2) - s^2}.$$

14 *Die Ordnungskreise und der Mittelpunktskreis e bilden einen Büschel I*).* Schneiden sich die Ordnungskreise, so geht der Mittelpunktskreis durch die Schnittpunkte, und nur der zugleich

ausserhalb k_1 u. innerhalb k_2	innerhalb k_1 u. ausserhalb k_2

liegende Teil von e ist der Mittelpunktsort der Büschelkreise.

Schneiden sich die Ordnungskreise nicht, so liegt der Mittelpunktskreis e ganz innerhalb des grösseren k_1, und folglich

existiert das Büschel nicht.	existiert das Büschel immer, sobald e reell ist; und der ganze Kreis e ist der Mittelpunktsort.

15 Das Büschel erstreckt sich nicht über die ganze Ebene, sondern wird von einer Kurve vierter Ordnung, einem Cartesischen Oval, umhüllt. Jedoch nur diejenigen Büschelkreise schneiden ihre unendlich benachbarten, deren Mittelpunkte so liegen, dass die zugehörenden Tangenten des Kreises e den Ordnungskreis

k_1 nicht schneiden.	k_2 nicht schneiden.

16 Das umhüllende Cartesische Oval schneidet die Axe in zwei bez. vier Punkten, je nachdem die Ordnungskreise sich schneiden oder nicht**).

17 Das Büschel und die Enveloppe sind positiv selbstinvers in Bezug

auf den Ordnungskreis k_1.	auf den Ordnungskreis k_2.

18

VI.

$\mathbf{B}\ominus_1\phi_2$ oder $\mathbf{B}_{N_1M_2}$

Büschel der Kreise, welche in Bezug auf den einen Ordnungskreis k_2 negativ selbstinverse und in Bezug auf den andern k_1 negative Inversionskreise sind. ($\mathbf{B}\phi_1\ominus_2$ oder $\mathbf{B}_{M_1N_2}$ existiert nicht.)

---

*) Sind $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ die Gleichungen der Ordnungskreise, so ergiebt sich als Mittelpunktskreis $S_1 + S_2 = 0$.

**) Der Name Cartesisches Oval soll hier in weiterem Sinne für beide Arten von Enveloppen gebraucht werden, obwohl er eigentlich nur der letzteren zukommt. (Vergl. hierzu die Anmerkung auf Seite 111.)

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Büschelkreise ist der um den Mittelpunkt E der Centrale der Ordnungskreise $k_1 > k_2$ beschriebene Kreis e vom Radius 19

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(k_1^2 - k_2^2) - s^2}\ .$$

Das Büschel existiert immer, sobald der Mittelpunktskreis e reell ist; und der ganze Kreis ist der Mittelpunktsort. 20

Das Büschel erstreckt sich nicht über die ganze Ebene, sondern wird wie V. von einem Cartesischen Oval umhüllt. 21

Die Büschelkreise schneiden sich sämmtlich und die Enveloppe hat daher mit der Symmetrieaxe immer vier Punkte gemein. 22

Das Büschel und die Enveloppe sind negativ selbstinvers in Bezug auf den Ordnungskreis k_2. 23

III.

Die Cartesischen Ovale und ihre konfokalen Büschel.

§ 58. Da die Kreisbüschel V und VI beide von Cartesischen Ovalen*) umhüllt werden, so kann ein Oval zugleich in Bezug auf einen positiven und einen negativen Inversionskreis selbstinvers sein. Dies ist der Fall, wenn das Oval seine Symmetrieaxe in vier reellen Punkten schneidet. Die Kurve hat dann nach § 54,4 u. 55 ausser der Axe noch einen positiven Inversionskreis, welcher durch die Schnittpunkte der beiden andern geht und den ersten positiven Inversionskreis rechtwinklig schneidet. Also: 1

Schneidet ein Cartesisches Oval seine Symmetrieaxe in vier reellen Punkten, so ist die Kurve die Enveloppe dreier Kreisbüschel V, VI', V''. Die Mittelpunkte der sechs Ordnungskreise liegen symmetrisch in Bezug auf E, und sowohl die Ordnungskreise, welche Inversionskreise der Kurve sind, schneiden sich in zwei Punkten, als auch die übrigen drei. Die gemeinschaftliche Sehne der letzteren Kreise i *geht durch E, die der ersteren i durch J', den Mittelpunkt des negativen Inversionskreises.* 2

*) Diese interessanten Kurven sind vielfach behandelt worden. Siehe die Anmerkungen auf den Seiten 77, 111 und 118 vorliegender Abhandlung.

3 Das Cartesische Oval ist also auf dreierlei Weise die Enveloppe von Kreisen c, welche ihre Mittelpunkte C auf einem um E mit e als Radius beschriebenen Kreise e haben und selbstinvers in Bezug auf einen Kreis i vom Mittelpunkte J und der Potenz p sind.

4 Die Radien der drei koncentrischen Kreise e sind von einander unabhängig, desgleichen auch die Entfernungen s der Inversionscentra von E; zwischen den Potenzen hingegen besteht nach § 54,7 die Beziehung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} = 0.$$

5 Von den Punkten J sind je zwei in Bezug auf den Kreis i, welcher dem dritten zugehört, invers.

6 Da die beiden Kreise c_1 und c_2, deren Mittelpunkte C_1 und C_2 auf der Symmetrieaxe liegen, in Bezug auf ihre beiden Aehnlichkeitspunkte J'' und J' invers sind (§ 55,2), so bilden J'' C_2 J' C_1 vier harmonische Punkte. J'' J' sind also (§ 20,3) in Bezug auf e positiv inverse Punkte. Hieraus folgt unter Benutzung von 5: *Das durch e und i, bez. e'' und i'' bestimmte Kreisbüschel hat J'' und J', bez. J und J' zu Grenzpunkten.*

7 Die Punkte P des Ovals als einer Enveloppe sind die Schnittpunkte unendlich benachbarter Kreise c. Dieselben lassen sich auf einfache Weise bestimmen:

Es sei c irgend einer der Kreise und C sein Mittelpunkt. Die Centrale desselben mit seinem unendlich benachbarten Kreise wird die durch C gehende Tangente CF des Kreises e sein. Da nun die Schnittpunkte P der beiden unendlich benachbarten selbstinversen Kreise c invers in Bezug auf den Inversionskreis i sind, so müssen es die Punkte des Kreises c sein, welche auf dem von J auf die Tangente CF gefällten Lote liegen. An Stelle des Kreises c kann auch der um F beschriebene selbstinverse Kreis t zur Bestimmung der Punkte P genommen werden, da alle in Bezug auf i selbstinversen Kreise, deren Mittelpunkte auf CF liegen, ein Büschel bilden.

8 Da nun immer zwei Tangenten des Kreises e parallel sind, so wird jeder durch J gehende Radiusvektor die Kurve im Allgemeinen in vier Punkten schneiden.

Ist die Potenz p' negativ, so sind immer beide Punktpaare reell, da sich zwei negativ selbstinverse Kreise c' immer schneiden.

Ist dagegen die Potenz p (p'') positiv, so werden sich zwei unendlich benachbarte Kreise c (c'') nur dann schneiden, wenn der Fusspunkt F ausserhalb des Inversionskreises i (i'') sich befindet.

9 Liegt F auf dem Inversionskreise i, (i'') ist also die Tangente CF den Kreisen e (e'') und i (i'') gemeinschaftlich, so durchschneidet das Oval in F den Kreis i (i'') orthogonal.

10 Die Kurve besteht aus zwei Ovalen, von denen das grössere das kleinere umschliesst. Sind P_1 , P_4 die Punkte, in welchen das grössere Oval und P_2 , P_3 diejenigen, in welchen das kleinere die Symmetrieaxe schneidet, so ist die Anordnung derselben mit den Inversionscentren oder Brennpunkten

$$J'' \; P_4 \; P_3 \; J' \; J \; P_2 \; P_1.$$

11 Es werde noch bemerkt, dass die Fusspunkte F nach § 46,4 eine *Pascal'sche Schnecke,* also ein specielles Cartesisches Oval beschreiben.

12 In obiger Konstruktion der Kurvenpunkte wurden zu einem beliebigen Kreise c seine Berührungspunkte P_1 und P_2 mit dem Oval gefunden; C ist also der Schnittpunkt der Normalen der beiden Kurvenpunkte. Ist D der Schnittpunkt der beiden Tangenten, so geht der über CD als Durchmesser beschriebene Kreis g durch P_1 und P_2. Da nun CD eine Tangente des Kreises e ist, so schneiden sich g und e rechtwinklig; da ferner P_1 und P_2 positiv invers in Bezug auf i sind, so wird i von g nach § 24,1 ebenfalls rechtwinklig geschnitten. Nach 6 geht daher der Kreis g als orthogonaler zu dem durch e und i bestimmten Kreisbüschel durch J'' und J'.

13 Die Normale und Tangente eines beliebig gegebenen Kurvenpunktes P_1 lässt sich hiernach in einfacher Weise konstruieren, indem man den betreffenden Punkt C z. B. als Schnittpunkt der Kreise e und g ermittelt.

1 § 59. Die Gleichung der Enveloppe in Polarkoordinaten $r|\varphi$, auf ein J als Pol bezogen, kann mit Hilfe der soeben behandelten Konstruktion der Kurvenpunkte leicht wie folgt (ohne höhere Analysis) gewonnen werden:

Da $EC = e$ und $JE = s$ ist, und EC mit JF gleiche Richtung hat, ist die von J auf die Tangente des Kreises E gefällte Normale

$$JF = e + s \cos \varphi$$

und der Radius t des um F als Mittelpunkt beschriebenen selbstinversen Kreises

$$t = \sqrt{(e + s \cos \varphi)^2 - p} .$$

Da hiernach von den zwei Radienvektoren, welche sich aus JF und t durch Addition oder Subtraktion ergeben, die Beziehungen gelten

$$r_1 + r_2 = 2(e + s \cos \varphi), \qquad r_1 . r_2 = p,$$

so sind dieselben die Wurzeln der Gleichung:

$$r^2 - (r_1 + r_2) r + r_1 r_2 = 0 .$$

Nach Substitution ergiebt sich daher als Gleichung der gesuchten Enveloppe:

2 (α) $$r^2 - 2(e + s \cos \varphi) r + p = 0 .$$

Wird hierin die abgekürzte Bezeichnung

$$R = \frac{r}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{r}$$

des § 50 eingeführt, so lautet die Gleichung des Cartesischen Ovals:

(β) $$R - \frac{2}{\sqrt{p}}(e + s \cos \varphi) = 0 .$$

3 Ganz dieselben Gleichungen gelten in entsprechender Bezeichnung für die beiden andern Inversionskreismittelpunkte $J' \; J''$ als Koordinatenpole.

4 Die Wurzeln der Gleichung (α), d. h. die einem beliebigen φ entsprechenden Radienvektoren sind nach Grösse, Vorzeichen und Zugehörigkeit zu den beiden Ovalen der Kurve für die drei Koordinatenpole verschieden.

Für J als Pol sind beide Wurzeln immer positiv, für J' ist immer die eine positiv, die andere negativ und für J'' sind beide entweder positiv oder negativ. Stets bestimmen die positiven Wurzeln Punkte des grossen Ovals, die negativen Punkte des kleinen.

5 Eine jede durch einen Pol J gehende Gerade schneidet die Kurve in vier Punkten; die Radienvektoren der fehlenden zwei ergeben sich (unter Beibehaltung der durch φ bestimmten positiven Richtung) nach Vertauschung der Koordinaten $r|\varphi$ in Gleichung (α) durch $-r|\varphi + \pi$ als Wurzeln der Gleichung

(α') $$r^2 + 2(e - s \cos \varphi) r + p = 0 .$$

6 Wird die Gleichung (α) für die Winkel φ und $\varphi + \pi$ aufgestellt, so ist die Summe der Koeffizienten der zweiten Glieder gleich $4e$; d. h.: *In Bezug auf einen Brennpunkt als Pol ist die alge-*

*braische Summe der vier Radienvektoren, welche zwei entgegengesetzten Strahlen zugehören, konstant**). Bezeichnen Σ_1 und Σ_2 die Summen der absoluten Werte der Radienvektoren, welche dem grossen und kleinen Ovale der Kurve zugehören, so ergiebt sich bezüglich

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = 4e\ ,\qquad \Sigma'_1 - \Sigma'_2 = 4e'\ ,\qquad \Sigma''_1 - \Sigma''_2 = 4e''\ .$$

Es soll nun die Gleichung der Kurve für den Punkt E aufgestellt werden. Die neuen Polarkoordinaten seien $\varrho|\varepsilon$. Dieselben sind mit den ursprünglichen $r|\varphi$ durch die Gleichungen 7

$$r\cos\varphi = s + \varrho\cos\varepsilon \qquad \text{und} \qquad r^2 = \varrho^2 + 2\varrho s\cos\varepsilon + s^2$$

verknüpft. Wird Gleichung (α) auf die Form

$$(\gamma) \qquad r^2 + p - 2rs\cos\varphi = 2er$$

gebracht, so folgt durch Substitution der neuen Koordinaten nach leichter Umformung:

$$(\varrho^2 - s^2 + p)^2 - 4e^2(\varrho^2 + 2\varrho s\cos\varepsilon + s^2) = 0\ . \qquad 8$$

Diese Gleichung gewinnt an Symmetrie, wenn nach § 55,8 u. 11 für s und p die Werte

$$p - s^2 = e^2 - e_{,}^2 - e_{,,}^2 \qquad \text{und} \qquad s = \frac{e_{,}e_{,,}}{e}$$

eingeführt werden. Die sich ergebende Gleichung kann leicht auf die Form

$$(\varrho^2 - e^2 - e_{,}^2 - e_{,,}^2)^2 - 8\varrho\,.\,e e_{,} e_{,,}\cos\varepsilon - 4(e^2e_{,}^2 + e^2e_{,,}^2 + e_{,}^2e_{,,}^2) = 0$$

gebracht werden.

Da in derselben das Glied mit ϱ^3 fehlt, und die Koeffizienten von ϱ^2 und ϱ^0 den Winkel ε nicht enthalten, also konstant sind, so folgen für die Entfernungen der Kurvenpunkte von E die Sätze: 9

Auf jeder durch E gehenden Geraden, welche die Cartesische Kurve in vier reellen Punkten schneidet, ist die algebraische Summe der vier Radienvektoren gleich Null, und die Summe der sechs Produkte je zweier Radienvektoren, sowie das Produkt aller vier Radienvektoren, konstant.

Für $e > e' + e''$ liegt E innerhalb, für $e < e' + e''$ hingegen ausserhalb des kleinen Ovals (§ 55,13). Nur im ersten Falle sind

---

*) Derselbe Satz gilt in Bezug auf ein $\mathfrak{J}$ als Pol auch für die Radienvektoren der Schnittpunkte einer beliebigen Sehne, wie sich durch Elimination von φ aus Gleichung (α) und der einer beliebigen Geraden erweisen lässt. Vergl. Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. d. höheren ebenen Kurven.* 1873. pag. 312.

also unbedingt alle vier Radienvektoren reell; in letzterem Falle können zwei konjugiert imaginär sein.

10 Besonders einfach gestalten sich die Gleichungen der Ovale in bipolaren oder tripolaren Koordinaten; dieselben sollen im Folgenden ermittelt werden:

Wird nur in das erste Glied der Gleichung (γ) des Ovals ϱ eingeführt, so resultiert

$$\varrho^2 - s^2 + p = + 2 e r \; ,$$

und es ergeben sich nach Elimination von s und p mit Hilfe von § 55,11 für E und je ein J als Pole die bipolaren Gleichungen:

$$\varrho^2 + e^2 - e_{,}^2 - e_{,,}^2 = 2 e r \; ,$$
$$\varrho^2 - e^2 + e_{,}^2 - e_{,,}^2 = 2 e_{,} r' \; ,$$
$$\varrho^2 - e^2 - e_{,}^2 + e_{,,}^2 = 2 e_{,,} r'' \; .$$

Die Subtraktion je zweier derselben führt zu den bipolaren Gleichungen

11
$$e r - e_{,} r' = e^2 - e_{,}^2 \, ,$$
$$e_{,} r' - e_{,,} r'' = e_{,}^2 - e_{,,}^2 \, ,$$
$$e_{,,} r'' - e r = e_{,,}^2 - e^2 \, ,$$

deren Pole je zwei der Punkte J sind.

Werden in die identische Gleichung

12
$$e^2 (e_{,}^2 - e_{,,}^2) + e_{,}^2 (e''^2 - e^2) + e_{,,}^2 (e^2 - e_{,}^2) = 0$$

für die Klammerausdrücke die in den Relationen 11 enthaltenen Werte substituiert, so folgt die tripolare Gleichung des Ovals

$$e (e_{,}^2 - e_{,,}^2) r + e_{,} (e_{,,}^2 - e^2) r' + e_{,,} (e^2 - e_{,}^2) r'' = 0 \; .$$

1 § 60. In Bezug auf die von Quetelet a. a. O. ausführlich behandelten optischen Eigenschaften der Cartesischen Ovale sei Folgendes kurz bemerkt:

Das Cartesische Oval ist für je zwei Brennpunkte J und die Quotienten der betreffenden e als Brechungsexponenten eine aplanetische Linie; d. h. ein von J' z. B. ausgehender Lichtstrahlenbüschel wird für $\frac{e''}{e'}$ als Brechungsexponent an dem Oval so gebrochen, dass J'' der Divergenzpunkt des gebrochenen Strahlenbüschels ist.

2 Das Verhältnis der Sinus der Winkel, welche beide Radienvektoren mit der Normale eines Kurvenpunktes bilden, ist also konstant.

3 Das Cartesische Oval ist für einen Kreis e in Bezug auf einen der Brennpunkte J eine secundäre Brennlinie; d. h. ein von J' z. B. ausgehender Lichtstrahlenbüschel erzeugt durch Re-

fraktion vom Brechungsexponenten $\frac{e}{e_1}$ an dem Kreise e eine Brennlinie, deren isogonale Trajectorie oder secundäre Brennlinie das Cartesische Oval ist.

§ 61. Durch eine inverse Transformation geht das Cartesische Oval im allgemeinen in eine bicirculare Kurve über; *wird jedoch einer der Brennpunkte J als Centrum von der beliebigen Potenz q genommen, so resultiert ein perspektivisch ähnliches Cartesisches Oval,* und das Aehnlichkeitsverhältnis ist gleich dem der Potenzen p und q; denn für zwei konzentrische Inversionskreise sind nach § 32,1 die Inversen des Ovals, hier das vorliegende Oval selbst und die neue Kurve, ähnlich.

Für die Cartesischen Ovale lassen sich Schliessungssätze analog denen, welche für eine Schaar von Berührungskreisen zu einem Kreispaar gelten,*) aufstellen.

Die Kreise c, welche ihre Mittelpunkte C auf dem Kreise e haben, können alle Lagen zu einander einnehmen. Für dieselben gilt der Satz:

Bilden die Kreise c, welche mit dem Cartesischen Oval in doppelter Berührung sind, eine Reihe von Kreisen, von denen jeder den unmittelbar vorhergehenden berührt, so liegen ihre Berührungspunkte auf einem Kreise i. Wenn sich die Reihe nach einem oder mehreren (m) Umläufen schliesst, so findet dies stets statt, mit welchem Kreise c die Reihe auch beginnen mag, und die Anzahl (n) der die Reihe bildenden Kreise bleibt dieselbe.

Da die Centrale je zweier auf einander folgender Kreise c den Kreis i berührt, so ergiebt sich der Beweis des Vorstehenden ohne Weiteres aus einem Satze von Poncelet**), welcher für den speciellen Fall, in welchem er hier zur Anwendung kommt, lautet: Ist ein Polygon C zugleich einem Kreise i um- und einem andern e eingeschrieben, so giebt es unzählige, welche dieser Bedingung genügen.

---

*) In § 38,8 sind letztere erwähnt. Wir werden unten näher auf dieselben eingehen.

**) Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures,* 1865, T. I. Sect. IV. Chap. III p. 349: „Quand un polygone quelconque est à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre, il en existe une infinité de semblables qui jouissent de la même, propriété à l'égard des deux courbes."

4 Die Aufgabe, die Bedingungsgleichung aufzustellen, welcher die Konstanten p, e, s des Ovals genügen müssen, damit die Schaar der n Kreise c sich nach m Umläufen schliesst, ist hiernach identisch mit dem Problem: die Relation zu finden, die zwischen den Radien zweier Kreise und ihrer Centrale bestehen muss, wenn sich dem einen ein Vieleck umschreiben lassen soll, das zugleich dem andern eingeschrieben ist. Auf elementarem Wege ist es nicht möglich, eine allgemeine Lösung zu erhalten, wohl aber mit Hilfe *elliptischer Funktionen*, wie C. G. J. Jacobi zuerst gezeigt hat*).

5 Die Bedingungsgleichungen für den Schluss lauten:

$$\frac{\sqrt{p}}{e+s} = \cos \operatorname{am} \frac{2mK}{n}, \qquad \frac{e-s}{e+s} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2mK}{n}},$$

$$\operatorname{mod} k^2 = \frac{4es}{(e+s)^2 - p}, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

6 Aus vorstehenden transcendenten Bedingungsgleichungen können nun solche in rationaler Form zwischen den das Oval bestimmenden Konstanten hergeleitet werden. Dieselben sind aber sehr zusammengesetzte Ausdrücke mit Ausnahme der eleganten Relationen, welche sich für das Dreieck und Viereck ergeben, und es sollen daher nur die letzteren beispielsweise angeführt werden**). Die Bedingung des Schliessens lautet für das Dreieck:

---

*) Mit vorliegendem Problem beschäftigte sich zuerst Euler, Nov. comm. Petropol. XI, pag. 114; er stellte die Formel für $n = 3$ auf.

Steiner, Crelle Journal, Bd. II, pag. 96—98, od. Ges. W. Bd. I, pag. 159; gab die Formeln für $n = 3, 4, 5, 6, 8$ ohne Beweis.

Nicol. Fuss, *De Polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis,* Nova acta Petropol. XIII, 1798, pag. 166—189; gab die geometrische Ableitung, jedoch auch nur bis $n = 8$.

Jacobi, *Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie,* Crelle Journal, Bd. III, pag. 376.

Richelot, Crelle's Journal, Bd. XXXVIII, pag. 353.

Schlömilch, Compendium d. höheren Analysis, Bd. II. 1874, pag. 398—400.

G. Kunz, *Ueber Vielecke, welche einem Kreise eingeschrieben und einem andern zugleich umgeschrieben sind.* Zwickau 1888, Programm No. 527.

**) Speciell über Dreiecke und Vierecke, welche sowohl einem Kreise umgeschrieben, als auch einem andern eingeschrieben sind, finden sich noch verschiedene Sätze bei Steiner, Borchardt's Journal Bd. LV. p. 356—387, oder Ges. W. p. 673 u. 674.

$$\frac{\sqrt{p}}{e+s} + \frac{\sqrt{p}}{e-s} = 1$$ 7

und für das Viereck:

$$\frac{p}{(e+s)^2} + \frac{p}{(e-s)^2} = 1 \ .$$

Das Vieleck der Mittelpunkte C einer sich schliessenden Schar von Kreisen c, welche das Cartesische Oval doppelt berühren, besitzt noch mehrere bemerkenswerthe Eigenschaften: *Die verschiedenen Diagonalen umhüllen Kreise, welche dem durch e und i bestimmten Kreisbüschel angehören, da der Modul k für alle dem Büschel angehörenden Kreise konstant ist.* 8

Um dies zu erkennen, muss obige für k aufgestellte Formel umgestaltet werden. Da nach § 58,6 das betreffende Kreisbüschel J'' und J' zu Grenzpunkten hat, so sind s'' und s' mit e und $i = \sqrt{p}$ durch die Gleichungen 9

$$s' \, s'' = e^2 \qquad \text{und } (s'' - s)\,(s' - s) = p$$

verknüpft. Werden diese Werte in obige Formel 5 eingeführt, so ergiebt sich nach leichter Umformung:

$$k^2 = \frac{4\sqrt{s' \, s''}}{(\sqrt{s'} + \sqrt{s''})^2} = \frac{4\,e}{(\sqrt{s'} + \sqrt{s''})^2}$$

Da hierin s nicht mehr vorkommt, so hat k für alle Kreise des betreffenden Büschels denselben Wert.

Besitzt das Vieleck eine gerade Anzahl Ecken, so degeneriert der Kreis, welchen die durch gegenüberliegende Punkte gehenden Diagonalen berühren, in einen innerhalb des Ovals liegenden Punkt J', den einen Grenzpunkt des Büschels. Der Ort dieses Punktes ist also sowohl von der Lage des $2\,n$-Eckes als auch von der Anzahl $2\,n$ der Ecken ganz unabhängig*). 10

Der Beweis ist einfach zu führen: Jedem Kreise c ist in Bezug auf J' von der Potenz p' ein andrer Kreis der Schar negativ 11

*) Diesen Satz hat schon Poncelet, a. a. O. pag. 352 aufgestellt:
„Un polygone quelconque, d'un nombre pair de sommets, étant inscrit à la fois à une section conique et circonscrit à une autre; 1° toutes les diagonales qui joignent les sommets respektivement opposés de ce polygone se croiseront en un seul et même point; 2° ce point demeurera invariable de position, quand on viendra à faire mouvoir le polygone entre les deux courbes, d'après les conditions primitives; 3° ce point sera l'un des points de concours des sécantes conjuguées communes à ces courbes."

invers. Ist dieser nun gerade der $(n+1)^{te}$ Kreis einer Reihe, deren erster c ist, und von denen jeder den unmittelbar vorhergehenden berührt, so sind die Kreise, welche die Reihe fortsetzen, die negativ inversen des zweiten, dritten u. s. f.; und der $2\,n^{te}$ berührt wiederum den ersten Kreis c. Da nun die Mittelpunkte zweier inversen Kreise mit dem Inversionscentrum in einer Geraden liegen, und dasselbe für die Berührungspunkte je zweier inverser Kreispaare gilt, so folgt obiger Satz, welcher sich auch in der Form aussprechen lässt:

12 *Bilden $2\,n$ Kreise c, welche mit dem Cartesischen Oval in doppelter Berührung sind, eine sich schliessende Reihe, in der jeder Kreis den unmittelbar vorhergehenden berührt, so schneiden sich die Verbindungsgeraden sowohl gegenüberliegender Kreismittelpunkte, als auch gegenüberliegender Berührungspunkte in dem Brennpunkt J' des Ovals, also in einem für alle Lagen der Reihe unveränderlichen Punkte.*

13 Einer sich schliessenden Reihe von Kreisen c ist in Bezug auf einen der Grenzpunkte J' bez. J'' im allgemeinen immer eine Reihe von anderen Kreisen c_i derselben Schar negativ bez. positiv invers.

14 Nur für eine gerade Anzahl von Kreisen c kann die Reihe c selbstinvers in Bezug auf ~~einen der~~ Grenzpunkte sein. In Bezug auf J' findet dies immer statt (12), in Bezug auf J'' jedoch nur dann, wenn die Reihe gegen die Axe des Ovals symmetrisch ist.

15 Da die beiden Kreisreihen c und c_i derselben Schar angehören, und also die beiden Vielecke, welche von den Mittelpunkten C und C_i gebildet werden, demselben Kreispaare um- bez. eingeschrieben sind, so folgt:

Ist ein Vieleck einem Kreise e eingeschrieben und zugleich einem andern i umgeschrieben, und werden von den Ecken C und den Berührungspunkten T aus durch einen der Grenzpunkte des durch die beiden Kreise bestimmten Büschels Gerade gezogen, welche die Kreise e und i in den Punkten C_i und T_i nochmals schneiden, so bilden im allgemeinen C_i die Ecken und T_i die Berührungspunkte eines andern Vielecks, welches, wie das ursprüngliche, zugleich dem Kreise e eingeschrieben und dem Kreise i umgeschrieben ist.

16 Da die Ecken beider Vielecke C und C_i zusammen genommen

immer ein Vieleck von gerader Seitenzahl bilden, und in diesem die Seiten der beiden ursprünglichen Vielecke Diagonalen sind, so folgt als Zusatz zu 12: *In einem 2 n Eck, welches einem Kreise e eingeschrieben und zugleich dem Kreise i umgeschrieben ist, schneiden sich die Verbindungslinien der Berührungspunkte, welche gegenüberliegende gleichartige Diagonalen mit ihrem Hüllkreise bestimmen, in dem Grenzpunkte J'.*

§ 62. Die Schar der Kreise c besitzt noch andre merkwürdige Eigenschaften, welche in analoger Weise auch für die Kreise c' bez. c'' gelten. 1

Da nach § 58,12 die Punkte J'' J' P_2 C P_1 D auf einem Kreise g liegen, und zwei unendlich benachbarte Kreise c den Schnittpunkt D ihrer gemeinschaftlichen Tangenten zum äusseren Aehnlichkeitspunkt und C selbstverständlich zum inneren haben, so ist der Kreis g ihr Aehnlichkeitskreis. Die beiden unendlich benachbarten Kreise c erscheinen daher auch von J'' aus unter gleichen Winkeln; oder mit anderen Worten: das Verhältnis $J''C : P_1C$ ist für zwei unendlich benachbarte und folglich für alle Kreise c konstant.

Da ferner J'' und J' positiv inverse Punkte in Bezug auf den Kreis e sind, also das Verhältnis $J''C : J'C$ konstant ist, so ergiebt sich nach dem obigen auch $J'C : P_1C$ als konstantes Verhältnis. 2

Dieselben Beziehungen finden statt für die Kreise c' in Bezug auf J'' und J, und die Kreise c'' in Bezug auf J und J'. 3

Die Kreise c können hiernach unter kinematischem Gesichtspunkt als verschiedene Phasen eines ähnlich veränderlichen Systems*) aufgefasst werden, welches in einem Kreise und einem Punkte J'' (bez. J') besteht. Ist, wie im vorliegendem Falle, J'' als Aehnlichkeitspol unbeweglich, so heisst die Bewegung einförmig, und speciell kreislinig, wenn ein Punkt, hier der Mittelpunkt C, der Systemkurve c einen Kreis e beschreibt. 4

Aus obigem lässt sich daher folgern: 5

Das Cartesische Oval ist in Bezug auf jeden der drei Brennpunkte als Aehnlichkeitspol in doppelter Weise die Hüllbahn-

*) Siehe über ähnlich veränderliche Systeme Burmester, *Lehrbuch der Kinematik*, Bd. I, p. 865, woselbst auch die vielseitige Literatur eingehend berücksichtigt ist.

*kurve einer kreislinigen Bewegung eines ähnlich veränderlichen Kreises**).

6 Wird nun die Gesamtheit der zweifach unendlichen Kreise c der Ebene, welche so gelegen sind, dass für alle das Grössenverhältnis der Entfernung des Mittelpunktes von einem festen Punkte zum Radius konstant ist, ein konisches System**) genannt, so folgt:

7 *In Bezug auf jeden der drei Brennpunkte J ist das Cartesische Oval in doppelter Weise die Enveloppe der Kreise c eines konischen Systems, deren Mittelpunkte auf einem Kreise e liegen.*

8 Da nach 1 und 2 die Kreise c zwei konischen Systemen angehören, und also zwei konische Systeme eine Kreisschar gemeinsam haben, deren Mittelpunkte auf einem Kreise liegen, so ergiebt sich:

Das Cartesische Oval ist in dreifacher Weise die Enveloppe der Kreise c, welche zwei konischen Systemen zugehören, deren Centralpunkte je zwei Brennpunkte J des Ovals sind.

9 Ueber die sechs konischen Systeme, welchen die drei Kreisscharen c angehören, und deren Centralpunkte die Brennpunkte J sind, lässt sich durch cyklische Anordnung

$$\begin{array}{ccc} & J' & \\ c & & c'' \\ J'' & & J \\ & c' & \end{array}$$

*) Diese Erzeugungsweise des Cartesischen Ovals rührt von Quetelet her.

**) Wird jedes in Bezug auf eine Ebene symmetrische Punktpaar durch den Kreis der Ebene repräsentiert, welcher den Fusspunkt des Lotes zum Mittelpunkt und den senkrechten Abstand der Punkte von der Ebene zum Radius hat, so repräsentiert das vorliegende Kreissystem die Punkte eines Rotationskegels, dessen Scheitel der feste Punkt ist und dessen Axe in dem festen Punkte auf der Ebene lotrecht steht.

Nach dem Vorgange von W. Fiedler (*Cyklographie* p. 17 u. 23), welcher das System von Kreisen, welche eine Gerade, bez. Ebene des Raumes repräsentieren, lineare Reihe, bez. planares System genannt hat, habe ich für das obige den Namen konisches System gewählt. (Vergleiche hierüber auch mein Programm, 1888 No. 548, § 15 und den Anhang vorliegender Abhandlung).

In W. Fiedler, *Darstellende Geometrie*, III. Aufl. Bd. II. p. 62, wird ein Kreissystem untersucht, von welchem sowohl das konische als auch das planare System Specialfälle sind: Es ist das System von zweifach unendlich vielen Kreisen, welches sich aus den einfach unendlich vielen linearen Kreisreihen zusammensetzt, die einen Kreis gemeinsam haben, und deren Aehnlichkeitspunkte auf einem andern Kreise (oder Kegelschnitt) liegen.

leicht eine Uebersicht gewinnen. Jedes der sechs auftretenden konischen Systeme wird dann durch zwei benachbarte Buchstaben bestimmt. Jede Schar c gehört zu zwei konischen Systemen, deren Centra die benachbarten J sind, und jedes J ist Pol zweier konischen Systeme, welche durch die benachbarten c charakterisiert sind.

10

Das für alle Kreise c eines konischen Systems konstante Verhältnis $JC : c$ der Mittelpunktsentfernung eines Kreises vom Centralpunkt J zum Radius desselben, werde der Modul des Systems genannt und kurz durch (c, J) bezeichnet. Die verschiedenen Moduln obiger sechs Systeme sind leicht zu ermitteln, wenn zur Berechnung unter den Kreisen c einer derjenigen gewählt wird, der seinen Mittelpunkt auf der Symmetrieaxe hat.

11

Für den Modul (c, J'') ergiebt sich z. B. mit Hilfe des Kreises c_1 der Wert

$$(c, J'') = \frac{e + s''}{c_1}.$$

Nach Substitution der in § 55 aufgestellten Relationen $c_1 = e' + e''$ und $e'' s'' = e e'$ nimmt dieser Ausdruck die einfache Form

$$(c, J'') = \frac{e}{e''}$$

an, aus welcher sich nach Analogie sofort die Werte aller übrigen Moduln ablesen lassen.

12

Es resultiert folgende Uebersicht:

$$(c, J') = \frac{e}{e'}, \qquad (c'', J') = \frac{e''}{e'},$$

$$(c, J'') = \frac{e}{e''}, \qquad\qquad (c'', J) = \frac{e''}{e},$$

$$(c', J'') = \frac{e'}{e''}, \qquad (c', J) = \frac{e'}{e},$$

aus welcher ohne Weiteres folgende Sätze erhalten werden:

13

In Bezug auf einen Aehnlichkeitsdoppelpol J verhalten sich die Moduln der beiden konischen Systeme wie die Radien der Kreise e, auf welchen die Mittelpunkte C der Systemkreise c sich bewegen; d. h. in Zeichen:

$$(c, J'') : (c', J'') = e : e' ,$$
$$(c'', J') : (c, J') = e'' : e ,$$
$$(c', J) : (c'', J) = e' : e'' .$$

14 Ferner ergeben sich für die Moduln je zweier Systeme, welchen eine Schar c angehört, die Proportionen:

$$(c'', J) : (c'', J') = e' : e ,$$
$$(c', J'') : (c', J) = e : e'' ,$$
$$(c, J') : (c, J'') = e'' : e' ,$$

und hieraus die folgenden:

15
$$J\,C'' : J'\,C'' = e' : e ,$$
$$J''C' : J\,C' = e : e'' ,$$
$$J'\,C : J''C = e'' : e' .$$

Dieselben bestimmen die Grössen der konstanten Entfernungsverhältnisse 2, welche je zwei Punkten J in Bezug auf einen beliebigen Punkt C ihres Inversionskreises e zukommen.

16 Endlich resultiert durch Multiplikation sämtlicher sechs Moduln noch der Satz: *Das Produkt der Moduln der sechs konischen Systeme, welchen die drei Scharen* c *in Bezug auf die* J *angehören, ist gleich Eins.*

17 Je nachdem der Modul $(c, J) \gtrless 1$ ist, schliessen die Kreise des Systems den Pol aus oder ein. Für $(c, J) = 1$ gehen alle Kreise durch den Pol; für $(c, J) = 0$ sind alle Kreise mit endlichem Radius koncentrisch in Bezug auf den Pol; und für $(c, J) = \infty$ resultieren (J im Unendlichen liegend) alle gleichen Kreise der Ebene.

18 Das Cartesische Oval tritt nach dem vorhergehenden als die Enveloppe von Kreisen auf, welche das cyklographische Bild der Durchdringungskurve zweier geraden Kreiskegel sind, deren Scheitel in der Bildebene liegen, und deren Axen senkrecht auf derselben stehen. Deshalb möge hieran noch die Bemerkung geknüpft werden, dass das Oval auch die orthogonale Projektion der Durchdringungskurve zweier Rotationskegel ist, deren Axen ebenfalls senkrecht auf der Ebene stehen, deren Scheitel aber nicht in derselben liegen*).

1 § 63. Ein Cartesisches Oval ist durch drei von einander unabhängige Grössen, z. B. e, s, p oder e, e', e'', eindeutig bestimmt. Wenn dagegen zwischen den drei gewählten Konstanten eine

*) W. Fiedler, *Darstellende Geometrie*, Bd. II, pag. 187.

Beziehung besteht, so ist eine ganze Schar von Kurven vorhanden, welche den vorgeschriebenen Bedingungen genügen.

2 Dies ist z. B. der Fall, wenn die Potenzen p'', p', p gegeben sind, da zwischen denselben nach § 58,4 eine Relation besteht. Es resultiert ein einfach unendliches System **B** von Ovalen, welches ein Büschel konfokaler Ovale genannt werden soll, da sämtliche in allen drei Brennpunkten übereinstimmen*).

3 Da durch die Brennpunkte und einen beliebigen Kurvenpunkt ein Oval eindeutig bestimmt ist, so schneiden sich die konfokalen Ovale eines Büschels nicht**).

4 Während die Brennpunkte J'', J', J allen Ovalen des Büschels **B** gemeinsam sind, besitzt jedes Oval desselben einen andern Punkt E. Dieser durchläuft die Strecke $J\infty$, welche die beiden andern Brennpunkte ausschliesst. Für die beiden Grenzlagen von E degeneriert die Kurve, und zwar: wenn der Punkt E mit J und folglich nach § 58,6 auch der Kreis e mit i zusammenfällt, in den Kreis i selbst — und, wenn E in's Unendliche rückt, in das Streckenpaar $\infty J''$ und $J' J$.

5 Da die beiden Potenzen p'' und p, welche dem äusseren und inneren Brennpunkt des Büschels zugehören, beide positiv, also gleichartig sind, so können sie mit einander vertauscht werden, und es existiert dann noch ein Büschel $\mathbf{B}_0$ konfokaler Ovale, welche J'' zum inneren und J zum äusseren Brennpunkt haben. Beide Büschel besitzen J' von der negativen Potenz p' zum mittleren Brennpunkt.

6 *Die drei Brennpunkte J bestimmen zwei Büschel konfokaler, sich orthogonal durchdringender Cartesischer Ovale. Durch jeden Punkt der Ebene gehen nur zwei derselben.* Zu dem einen Büschel gehören der Kreis i und die Teile $\infty J''$ und $J' J$ der Axe, zum andern der Kreis i'' und die Teile $J'' J'$ und $J \infty$ der Axe.

---

*) Dieselben müssten eigentlich trifokal genannt werden, da auch bifokale Scharen möglich sind, welche nur zwei der Brennpunkte gemeinsam haben. In letzterem Falle sind die Potenzen p variabel, und es muss noch eine Bedingung hinzutreten.

Eine solche Schar bifokaler Ovale von Bedeutung bildet z. B. diejenige, welche durch $J'' J'$ und das Verhältnis $n = e'' : e$ bestimmt ist. Es ist nach § 60,1 eine Schar aplanetischer Linien.

**) Selbstverständlich mit Ausnahme des Specialfalls, in welchem J'' und J' in einen Punkt zusammenfallen.

7 Die Orthogonalität der beiden konfokalen Büschel **B** und $\mathbf{B}_0$ ist leicht zu erweisen: Es sei P_1 ein Schnittpunkt zweier konfokaler Ovale O und O_0. Der zum Punkte P_1 in Bezug auf i inverse Punkt P_2 ist ebenfalls ein Schnittpunkt der beiden Ovale O und O_0, da beide Kurven selbstinvers in Bezug auf i sind. Haben nun, was das Oval O anlangt, die beiden Normalen bez. Tangenten, welche den Punkten P_1 und P_2 zugehören, C bez. D zu Schnittpunkten, so liegen nach § 58,12 C und D mit P_1 und P_2 auf einem Kreise g, welcher auch durch die Brennpunkte J'' und J' geht; und der Durchmesser $C\ D$ ist die Mittelnormale von $P_1\ P_2$.

Werden P_1 und P_2 als Punkte des Ovals O_0 aufgefasst, so müssen die Schnittpunkte C_0 und D_0 der Normalen bez. Tangenten auf dem durch $P_1\ P_2\ J''\ J'$ gehenden Kreise g_0, d. h. auf g liegen, da schon drei Punkte einen Kreis eindeutig bestimmen. In gleicher Weise müssen sich $C_0\ D_0$ und $D\ C$ als Mittelnormalen von $P_1\ P_2$ decken. Die Schnittpunkte C_0 bez. D_0 der Normalen bez. Tangenten des Ovals O_0 sind also identisch mit den Schnittpunkten D bez. C der Tangenten bez. Normalen des Ovals O, und es ist somit die Orthogonalität beider Kurvensysteme bewiesen.

8 Die beiden orthogonalen Ovale O und O_0 besitzen ausser P_1 und P_2 noch mehr Schnittpunkte. Werden zum Punkte P_1 abwechselnd die inversen Punkte P_2, P_3, P_4 in Bezug auf die sich rechtwinklig schneidenden Kreise i und i'' ermittelt, so liegen die vier sich ergebenden Punkte auf einem i und i'' orthogonal schneidenden Kreise k. Zwischen den Punkten bestehen die inversen Beziehungen:

$$\left.\begin{matrix} P_1\ ,\ P_4 \\ P_2\ ,\ P_3 \end{matrix}\right\} \oplus i \qquad \text{und} \qquad \left.\begin{matrix} P_1\ ,\ P_2 \\ P_4\ ,\ P_3 \end{matrix}\right\} \oplus i''.$$

Da beide Ovale in Bezug auf i und i'' selbstinvers sind, so haben sie vorstehende vier Punkte und ihre zur Axe i''' symmetrischen zu Schnittpunkten.

9 Da die beiden orthogonalen Ovale negativ selbstinvers in Bezug auf i' sind, und also jedem Schnittpunkt P derselben ein andrer negativ invers ist, so muss (da überhaupt nur acht Schnittpunkte vorhanden sind) jeder der vier symmetrischen Schnittpunkte P' einem der Punkte P negativ invers entsprechen.

10 Werden der Einfachheit wegen die acht Schnittpunkte nur

durch ihre Indices bezeichnet, so bestehen zwischen denselben folgende inverse Beziehungen:

$$\left.\begin{matrix}1&2'&3'&4\\2&1'&4'&3\end{matrix}\right\}\oplus J\ ;\ p=i^2\ ,$$

$$\left.\begin{matrix}1&2&3&4\\3'&4'&1'&2'\end{matrix}\right\}\ominus J'\ ;\ p'=i_{\prime}^2\ ,$$

$$\left.\begin{matrix}1&2&3'&4'\\4&3&2'&1'\end{matrix}\right\}\oplus J''\ ;\ p''=i_{\prime\prime}^2\ ,$$

$$\left.\begin{matrix}1&2&3&4\\1'&2'&3'&4'\end{matrix}\right\}\oplus J'''\ ;\ p'''=\infty\ .$$

Da je zwei inverse Punktpaare auf einem selbstinversen Kreise liegen, so folgt:

Je zwei orthogonale Ovale schneiden sich in acht Punkten, welche zu je vier in zwölf Kreisen k liegen, von denen in Bezug auf jeden der vier Inversionskreise i (incl. der Axe) je sechs Kreise selbstinvers sind, während sich die übrigen paarweise entsprechen.

Die zwölf Kreise k, welche je vier der acht Schnittpunkte zweier konfokaler Ovale enthalten, gehören paarweise zu sechs Kreisbüscheln, deren Potenzaxen die dreifache Symmetrieaxe und die durch die Brennpunkte gehenden Normalen derselben sind, und deren Mittelpunkte umgekehrt auf den drei Normalen und der Axe liegen.

Je zwei der Kreisbüschel sind orthogonal und haben zu Grenz- bez. Schnittpunkten einen der drei Punktpaare, in welchen sich die drei positiven Inversionskreise (incl. der Axe) schneiden).*

Von den beiden Tripeln koncentrischer Kreise

$$e''_0 > e'_0 > e_0 \quad \text{und} \quad e'' < e' < e\ ,$$

welche den beiden orthogonalen Ovalen O_0 und O zugehören, sind nach § 58,6 (ausser i) sowohl e als auch e_0 Kreise des Büschels, welches J'' und J' zu Grenzpunkten hat. Analoges gilt für die beiden übrigen Kreispaare, und es resultieren daher folgende drei Kreisbüschel:

---

*) Dieselben Sätze gelten allgemein für die Kreise, welche sich durch je vier der acht reellen Schnittpunkte zweier konfokaler bicircularer Kurven legen lassen. Die sechs Geraden, welche zugleich Mittelpunktsorte und Potenzaxen der Kreisbüschel sind, bilden dann die Figur der Seiten und Höhen eines Dreiecks, welches in Bezug auf jeden positiven Inversionskreis ein Polardreieck ist.

$$\begin{array}{llll} e''_0, & i'', & J', J, & e'', \\ e'_0, & & J'', J, & e', \\ e_0, & & J'', J', i, & e. \end{array}$$

15 Da die Büschel Grenzpunkte haben, und die Mittelpunkte E_0 und E der beiden Tripel ausserhalb auf verschiedenen Seiten der Grenzpunkte liegen, so schliessen sich je zwei korrespondierende Kreise e_0 und e, e'_0 und e', e''_0 und e'' immer aus.

16 Da die Mittelnormale je zweier Schnittpunkte P, welche invers in Bezug auf einen Kreis i sind, nach § 58,7 einen Kreis e von jedem der beiden orthogonalen Ovale berührt, also eine gemeinschaftliche Tangente t zweier korrespondierenden Kreise e und e_0 ist, — da ferner der Mittelpunkt K eines jeden der zwölf Kreise k der Schnittpunkt von vier Mittelnormalen inverser Punktpaare P ist, — und da endlich nach 15 ein jedes Paar korrespondierender Kreise e und e_0 vier gemeinschaftliche Tangenten t besitzt, so folgt:

17 *Die zwölf Mittelpunkte K der Kreise k gehören zu den Schnittpunkten der drei mal vier oder zwölf gemeinschaftlichen Tangenten, welche den drei Paaren korrespondierender Kreise e und e_0 zukommen, und zwar ist jeder der sechs Punkte K, welche auf der Axe liegen, der Schnittpunkt von zwei gleichartigen Tangenten eines Paares korrespondierender Kreise e und e_0, und jeder der übrigen sechs Punkte K der gemeinschaftliche Schnittpunkt von vier Tangenten, nämlich je zwei ungleichartigen zweier korrespondierender Kreispaare e und e_0.*

18 Da nach einem bekannten Satze der Planimetrie die vier Punkte, in welchen die inneren und äusseren Tangenten zweier Kreise e und e_0 sich gegenseitig schneiden, mit den beiden Mittelpunkten E und E_0 derselben auf einem Kreise liegen*), und da ferner nach § 20,4 die Schnittpunkte der gleichartigen Tangenten zweier Kreise e und e_0, als Aehnlichkeitspunkte derselben, invers in Bezug auf den Kreis sind, welcher ihre Centrale $E E_0$ zum Durchmesser hat, so folgt:

19 *Von den zwölf Punkten K gehören die sechs, nicht auf der Axe befindlichen, dem über $E E_0$ als Durchmesser beschriebenen Kreise an, und die sechs übrigen Schnittpunkte K, welche auf der Axe*

---

*) Denn für jeden der vier Schnittpunkte K schliessen die Geraden $K E$ und $K E_0$, als Winkelhalbierende zweier Nebenwinkel, einen rechten Winkel ein, dessen Schenkel durch E bez. E_0 gehen.

liegen, bilden eine I n v o l u t i o n, deren Doppelpunkte E und E_0 sind, d. h. sie sind paarweise positiv invers in Bezug auf den über $E E_0$ als Durchmesser beschriebenen Kreis.

20 Werden von den zwölf Mittelpunkten der Kreise k diejenigen, welche dem über $E\ E_0$ als Durchmesser beschriebenen Kreise angehören, paarweise mit $K\ K$ und $K\ K'$ bezeichnet, je nachdem sie auf einer oder verschiedenen Seiten der Axe liegen, und die der Axe angehörenden Punkte mit K_a und K_i, je nachdem sie ausserhalb oder innerhalb $E\ E_0$ sich befinden, so liegen sechsmal je drei Punkte

$$K \quad K \quad K_a \qquad \text{oder} \qquad K \quad K' \quad K_i$$

in zwölf Geraden t und mithin sechsmal je drei Punkte

$$K \quad K \quad K_i \qquad \text{oder} \qquad K \quad K' \quad K_a$$

auf zwölf durch den Mittelpunkt von $E\ E_0$ gehenden Kreisen.

21 Die soeben betrachteten gegenseitigen Beziehungen der Kreise k, auf welchen je vier der acht Schnittpunkte P zweier orthogonaler konfokaler Ovale liegen, ergeben, wenn der Kürze wegen die Kreise k nur durch die Indices der betreffenden Schnittpunkte P bezeichnet werden, folgende Uebersicht:

$$\begin{array}{llllll}
t'\ t'' & \left.\begin{matrix} 1 & 2' & 3' & 4 \\ 1' & 2 & 3 & 4' \end{matrix}\right\}(\times) & i\ \ i''' & (:)\left\{\begin{matrix} 1 & 1' & 2' & 2 \\ 3 & 3' & 4' & 4 \end{matrix}\right. & t, \\
t''\ t & \left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 3' & 4' \end{matrix}\right\}(:) & i''\ i & (\times)\left\{\begin{matrix} 1 & 1' & 3' & 3 \\ 2 & 2' & 4' & 4 \end{matrix}\right. & t', \\
t\ \ t' & \left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3' & 4' \\ 1' & 2' & 3 & 4 \end{matrix}\right\}(\times) & i'''\ i'' & (:)\left\{\begin{matrix} 1 & 1' & 4' & 4 \\ 2 & 2' & 3' & 3 \end{matrix}\right. & t''.
\end{array}$$

22 Hierzu ist folgendes zu bemerken: Je zwei Kreise k eines Büschels (§ 63,12) sind durch eine Klammer verbunden, je zwei orthogonale Büschel (§ 63,13) stehen neben einander, und die Büschel mit Grenz- bez. Schnittpunkten sind durch die Zeichen (:) bez. ($\times$) kenntlich gemacht. Die betreffenden Grenz- bez. Schnittpunkte der Büschel fallen mit den Schnittpunkten der in der Mitte stehenden Kreise i (incl. der Axe i''') zusammen.

Die Mittelpunkte K sind die Schnittpunkte der neben den Kreisen stehenden Tangenten t (17) der betreffenden Kreispaare e, e_0.

Die sechs Kreise k, deren Mittelpunkte K auf dem über $E\ E_0$ als Durchmesser beschriebenen Kreise liegen (19), stehen links; die übrigen, deren Mittelpunkte auf der Axe in Involution sind, rechts.

Nach der in 20 eingeführten Bezeichnung sind die Mittelpunkte der Kreise k abwechselnd links ein K und K', rechts ein K_a und K_i.

1 § 64. Die orthogonalen Ovale der Büschel **B** und $\mathbf{B}_0$ werden im Folgenden in dreifacher Weise zu Paaren einander zugeordnet, welche konjugierte orthogonale Ovale erster, zweiter oder dritter Art heissen sollen.

2 Den drei Kreisscharen c, c', c'' des einen Ovals O entsprechen die Kreisscharen c''_0, c'_0, c_0 des orthogonalen Ovals O_0.

3 Unter den Kreisen der Schar c, welche den Kreis i rechtwinklig schneiden, giebt es ein Paar symmetrisch zur Axe gelegene Kreise **c**, welche zugleich zum Kreise i'' rechtwinklig sind. Die beiden Kreise **c** gehören in Folge dessen auch der Kreisschar c''_0 eines Ovals vom orthogonalen Büschel an.

4 Zwei solche orthogonale Ovale **OI** und $\mathbf{OI}_0$, deren Kreisscharen c und c''_0 ein Kreispaar **c** gemeinsam haben, sollen konjugierte orthogonale Ovale erster Art der Büschel **B** und $\mathbf{B}_0$ genannt werden.

5 Sämtliche Kurven der beiden orthogonalen Büschel lassen sich hiernach zu Paaren konjugierter Ovale zusammenstellen. Insbesondere bilden die Kreise i und i'' ein konjugiertes Paar und ebenso die (nach § 63,6) den Büscheln zukommenden Teile der Axe.

6 Nach dem Obigen gehört das Kreispaar **c** dem Kreisbüschel an, welches dem durch i und i'' bestimmten orthogonal ist, und die beiden Mittelpunkte **C**, welche zugleich die Schnittpunkte der Kreise **e** und $\mathbf{e}''_0$ sind, liegen auf der Potenzaxe der Kreise i und i''. Hieraus folgt:

7 *Jeder Kreis* **c** *des zu i und i'' orthogonalen Kreisbüschels wird von zwei konjugierten orthogonalen Ovalen erster Art* **OI** *und* $\mathbf{OI}_0$ *der beiden konfokalen Büschel* **B** *und* $\mathbf{B}_0$ *berührt.*

8 Da nach § 58,6 J'' und J' in Bezug auf die Kreise e, und analog J und J' in Bezug auf die Kreise e''_0 positiv inverse Punkte sind, so schneiden sich die Tangenten der Kreise **e** bez. $\mathbf{e}''_0$, welche ihren Schnittpunkten **C** zugehören, in J'' bez. J.

9 Hiernach liegen die Berührungspunkte des Ovals **OI** mit dem Kreise **c** auf dem von J auf J''**C** gefällten Lote (§ 58,7), welches als Potenzaxe von i'' und **c** durch die Schnittpunkte beider Kreise geht. Analoges gilt für das Oval $\mathbf{OI}_0$, und es folgt:

Die vier Punkte, in welchen zwei konjugierte Ovale erster Art von jedem ihrer beiden eingeschriebenen Kreise **c** *berührt werden, liegen paarweise auf den Kreisen* i i'' *und bilden ein harmonisches Viereck.* 10

Letzteres folgt nach § 40 aus der Orthogonalität der drei Kreise i, i'' und **c**.

§ 65. Die Punkte J'' C EI und EI$_0$ C J bilden nach § 64,7 rechtwinklige Dreiecke, welche in der Höhe CJ' übereinstimmen, und es folgt: 1

$J''J' \,.\, J'\mathrm{EI} = \mathrm{EI}_0 J' \,.\, J'J$ oder $J'\mathrm{EI} : J'\mathrm{EI}_0 = J'J : J'J''$.

Hieraus ergiebt sich unter Benutzung des elementaren Satzes, dass sich die Kathetenquadrate wie ihre Projektionen auf die Hypotenuse verhalten, die Proportion: 2

$$\mathfrak{s}' : \mathfrak{s}'_0 = p : p''.$$

Da p und p'' allen Ovalen der beiden konfokalen Büschel gemeinsam sind, so heisst dies in Worten: 3

Für alle Paare konjugierter orthogonaler Ovale erster Art OI *und* OI$_0$, *welche zwei konfokalen orthogonalen Büscheln* **B** *und* **B**$_0$ *angehören, ist das Verhältnis der Entfernungen der Kreismittelpunkte* EI *und* EI$_0$ *vom gemeinschaftlichen mittleren Brennpunkt* J' *konstant, und zwar gleich dem der Potenzen* p *und* p'' *ihrer inneren Brennpunkte* J *bez.* J''.

Da die konjugierten Punkte EI und EI$_0$ auf der Axe ähnliche Punktreihen beschreiben, so folgt ferner nach § 15,1: 4

Die Kreise, welche je ein konjugiertes Punktpaar EI und EI$_0$ *zu Endpunkten eines Durchmessers haben, bilden eine lineare Reihe, deren Aehnlichkeitspunkt der mittlere Brennpunkt* J' *ist.*

§ 66. Das Cartesische Oval wird nicht nur von den Kreisen der drei Scharen c, c', c'', sondern auch von Kreisen c''' doppelt berührt, welche selbstinvers in Bezug auf i''' sind, und deren Mittelpunkte mithin auf der Geraden $e''' \equiv i'''$ liegen. 1

Die Scharen c''' und c'''_0 zweier orthogonaler Ovale entsprechen sich. 2

Nicht nur die Scharen c und c''_0 zweier orthogonaler Ovale können ein Kreispaar gemeinschaftlich haben, sondern auch 3

c und c'''_0 bez. c''' und c''_0.

Werden analog dem Vorhergehenden (§ 64,4) je zwei solche Ovale einander zugeordnet, so entsprechen sich insbesondere:

i und J'' J', $J\infty$ bez. $\infty J''$, J' J und i''.

4 *Es giebt also* d r e i *Zuordnungen orthogonaler Ovale zu Paaren* **OI** $\mathbf{OI}_0$ *mit je zwei gemeinsamen Kreisen* **c**, *welche Kurvenpaare oben als konjugierte Ovale* e r s t e r *Art bezeichnet worden sind.*

5 Von denselben hat die in § 64 behandelte Zuordnung besonderes Interesse, da bei ihr ein vollständiges Entsprechen der beiden orthogonalen Büschel **B** und $\mathbf{B}_0$ stattfindet. Bei den beiden anderen Zuordnungen ist dies nicht der Fall, sondern es sind von **B** und $\mathbf{B}_0$

das Ganze und ein Teil bez. ein Teil und das Ganze

konjugiert, da nach § 58,6 die auf e bez. e''_0 gelegenen Mittelpunkte der c bez. c''_0 nicht den ganzen, ausserhalb i bez. i'' befindlichen Teil der Axe i''' beschreiben können.

6 Im Allgemeinen, d. h. für $i \lessgtr i''$, giebt es kein ausgezeichnetes Paar konjugierter Ovale e r s t e r Art, welche mehr als e i n gemeinsames Kreispaar **c** besitzen. Dies findet nur für den Specialfall $i = i''$ statt (vergl. unten § 73).

1 § 67. Da i und i'' und nach § 36,1 auch ihre Inversionskreise $\mathbf{k}_a$ und $\mathbf{k}_i$ sich rechtwinklig schneiden, so sind umgekehrt i und i'' die Inversionskreise von $\mathbf{k}_a$ und $\mathbf{k}_i$.

2 Zwei orthogonale Ovale nun, von welchen e i n Schnittpunkt und mithin nach § 63,11 a l l e auf $\mathbf{k}_a$ und $\mathbf{k}_i$ liegen, sollen k o n j u g i e r t e orthogonale Ovale z w e i t e r Art genannt werden.

3 Da hiernach die beiden Kreise $\mathbf{k}_a$ und $\mathbf{k}_i$ alle acht Schnittpunkte **PII** der beiden konjugierten Ovale z w e i t e r Art enthalten, und zwar die Punkte 1 3 3′ 1′ bez. 2 4 4′ 2′, so folgt:

Die Schnittpunkte **PII** *je zweier konjugierter Ovale* z w e i t e r *Art* **OII** *und* $\mathbf{OII}_0$ *der beiden konfokalen orthogonalen Büschel* **B** *und* $\mathbf{B}_0$ *liegen zu je vier auf den Inversionskreisen* $\mathbf{k}_a$ und $\mathbf{k}_i$ *der Kreise* i *und* i''.

4 Ferner ergiebt sich in Vervollständigung des § 63,10:

Die Gruppe der acht Schnittpunkte **PII** *zweier konjugierter Ovale* z w e i t e r *Art ist positiv selbstinvers in Bezug auf die vier, einem Büschel angehörenden Kreise* i i'' $\mathbf{k}_a$ $\mathbf{k}_i$ *und die Inversionsgerade* i''', *und negativ selbstinvers in Bezug auf* i'. (Vergl. § 53,6.)

5 Es ist ohne Weiteres klar, dass durch eine inverse Transformation der Figur, welche die beiden positiven Kreise i und i'' in zwei

gleiche verwandelt (§ 40,1), die acht Schnittpunkte je zweier konjugierter orthogonaler Ovale zweiter Art in eine zweifach symmetrische Figur übergehen *).

Es bilden dann die Schnittpunkte 1 2 3 4 und 1' 2' 3' 4' je ein symmetrisches Viereck, dessen Axe 1 3 3' 1' ist. Da ein solches Viereck als rechtwinkliges Deltoid harmonisch ist, und durch Inversion das Doppelverhältnis von vier Punkten nach § 43 nicht geändert wird, so folgt:

Je vier Schnittpunkte zweier konjugierter Ovale zweiter Art, welche auf einer Seite der Axe liegen, bilden ein harmonisches Viereck.

§ 68. In Bezug auf einen der beiden Schnittpunkte der Kreise i und i'' als Centrum gehen die harmonischen Vierecke 1 2 3 4 und 1' 2' 3' 4' durch Inversion in zwei koncentrische Quadrate über. Die Anordnung der acht Schnittpunkte ist dann die folgende:

1
1'
4 4' 2' 2
3'
3

Hieraus erhellt sofort, dass die Gruppe der acht Schnittpunkte zweier konjugierter Ovale zweiter Art im Speciellen ausser den beiden soeben behandelten, harmonischen Vierecken 1 2 3 4 und 1' 2' 3' 4' noch zwei oder vier andre enthalten kann, und zwar bestehen zwei solcher ausgezeichneter Kurvenpaare mit je besonderen harmonischen Vierecken.

Unter den Vierecken, welche von den Schnittpunkten konjugierter Ovale zweiter Art gebildet werden, sind bei je einem der zwei harmonischen Ovalenpaare ausser 1 2 3 4 und 1' 2' 3' 4' noch harmonisch, entweder die Vierecke:

α) 1 3 3' 1' und 2 4 4' 2',

deren Ecken auf den Kreisen $\mathbf{k}_a$ *und* $\mathbf{k}_i$ *liegen, oder die Vierecke:*

β) 1 2 2' 1', 2 3 3' 2', 3 4 4' 3', 4 1 1' 4'.

---

*) Die Kurven jedoch, in welche die konjugierten Ovale transformiert werden, sind nicht zu einander symmetrisch, wie man bei oberflächlicher Betrachtung vermuthen könnte.

Die Vierecke:

γ) *1 2' 3' 4, 2 3' 4' 1, 3 4' 1' 2, 4 1' 2' 3,*

können hierbei n i e harmonisch sein).*

3 Es giebt daher in dieser Zuordnung (vergleiche § 70) nur z w e i und nicht drei harmonische Ovalenpaare. Dieselben schliessen sich gegenseitig aus, so dass sie also nie in e i n Paar zusammenfallen können.

4 Da in harmonischen Vierecken nach § 43,4 die Rechtecke

---

*) Dies folgt ohne Weiteres aus dem Satze:

Die Eckpunkte aller h a r m o n i s c h e n Antiparallelogramme $A_1\ A_2\ B_2\ B_1$ über derselben Grundlinie $A_1\ A_2 = a$ besitzen als geometrischen Ort zwei gleiche Kreise m_1 und m_2 des Kreisbüschels, welches die Eckpunkte von a zu Grenzpunkten hat. Die beiden Kreise berühren die Diagonalen der nach beiden Seiten über a errichteten Quadrate $A_1\ A_2\ D_2\ D_1$ in den Ecken D_1 und D_2. Ihre Mittelpunkte M_1 und M_2 liegen daher von den Endpunkten der Grundlinie um a entfernt. ($M_1\ A_1 = M_2\ A_2 = a$)

Beweis: Es sei $A_1\ A_2\ B_2\ B_1$ ein beliebiges Antiparallelogramm über der Grundlinie $A_1\ A_2 = a$, dessen Punkte B_1 und B_2 auf den Kreisen m_1 bez. m_2 liegen. Wird in Bezug auf den Kreis vom Radius a und Centrum A_1 die Figur positiv invers transformiert, so entsprechen: die Eckpunkte D_1 und A_2 des Quadrates sich selbst — dem Punkte D_2 dagegen der Mittelpunkt D'_2 desselben — den Kreisen m_1 und m_2 nach § 39,2 koncentrische Kreise m'_1 und m'_2 vom Mittelpunkte A_2 — und dem Kreise, welcher dem Antiparallelogramm umgeschrieben ist, eine durch A_2 gehende Gerade.

Da die Radien der koncentrischen Kreise m'_1 und m'_2 das Verhältniss $A_2\ D_1 : A_2\ D'_2 = 2 : 1$ besitzen und mithin $A_2\ B'_2 = B'_2\ B'_1$ ist, so liegen auf der durch A_2 gehenden Geraden die Punkte $\infty\ A_2\ B'_2\ B'_1$ harmonisch. Folglich bilden nach § 43,2 auch ihre inversen, die Ecken $A_1\ A_2\ B_2\ B_1$ des Antiparallelogramms, ein harmonisches Viereck, wie zu beweisen war.

Da die Antiparallelogramme und ihre geometrischen Orte m_1 und m_2 eine symmetrische Figur bilden, und eine solche als selbstinverse in Bezug auf eine Inversionsgerade angesehen werden kann, so folgt nach § 35,1 durch eine inverse Transformation der allgemeinere Satz:

Die Eckpunkte aller h a r m o n i s c h e n Kreisvierecke über derselben Grundlinie a, deren gegenüberliegende Seiten durch einen festen Punkt S der verlängerten Grundlinie gehen, besitzen als geometrischen Ort zwei Kreise m''_1 und m''_2 des Kreisbüschels, welches die Eckqunkte von a zu Grenzpunkten hat. Die beiden Ortskreise und die Eckpunkte der Grundlinie haben S zum gemeinschaftlichen Inversionscentrum.

Sie schliessen sich aus oder ein, je nachdem S auf der Verlängerung der Grundlinie a vom zunächst gelegenen Endpunkt derselben eine grössere oder kleinere Entfernung als a besitzt. Ist dieselbe gerade gleich a, fällt also S mit einem Mittelpunkte der Ortskreise m_1 oder m_2 zusammen, so artet einer der Ortskreise m''_1 und m''_2 in eine Gerade, die Mittelnormale der Grundlinie a aus.

aus den gegenüberliegenden Seiten einander gleich und halb so gross sind als das Rechteck aus den Diagonalen, so folgt aus obiger Anordnung (1) leicht mit Hilfe des Ptolemäischen Lehrsatzes:

Bei dem harmonischen Ovalenpaare (α) ist in jedem der nicht harmonischen Vierecke (β) und (γ) das Produkt zweier gegenüberliegenden Seiten das Doppelte der beiden andern; bei dem harmonischen Ovalenpaare (β) dagegen ist in den nicht harmonischen Vierecken (α) bez. (γ) das Produkt zweier gegenüberliegender Seiten das Doppelte bez. Dreifache der beiden andern.

[1] § 69. Bei konjugierten Ovalen zweiter Art sind die Punkte $\mathbf{K}_a$ und $\mathbf{K}_i$, in welchen sich die äusseren bez. inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise e' und e'_0 schneiden, zugleich die Aehnlichkeitspunkte der Kreise i und i'', also fest für alle konjugierten Kurvenpaare. Da nach § 20,4 die Kreise, welche die Mittelpunkte bez. Aehnlichkeitspunkte zu Endpunkten eines Durchmessers haben, sich rechtwinklig schneiden, so folgt:

[2] *Bei konjugierten Ovalen zweiter Art* $\mathbf{O}^{II}$ *und* $\mathbf{O}^{II}_0$ *bilden die Kreise, welche je ein entsprechendes Punktpaar* $\mathbf{E}^{II}$ *und* $\mathbf{E}^{II}_0$ *zu Endpunkten eines Durchmessers haben, ein Kreisbüschel, dessen Grenzpunkte die Aehnlichkeitspunkte* $\mathbf{K}_a$ *und* $\mathbf{K}_i$ *der Kreise* i *und* i'' *sind. Oder: die konjugierten Punktpaare* $\mathbf{E}^{II}$ *und* $\mathbf{E}^{II}_0$ *bilden eine Involution, deren reelle Doppelpunkte* $\mathbf{K}_a$ *und* $\mathbf{K}_i$ *sind.*

[1] § 70. Werden die soeben betrachteten konjugierten Ovale zweiter Art als solche definiert, deren Schnittpunkte je zwei harmonische Kreisvierecke enthalten und mithin auch auf zwei festen Kreisen sich bewegen, so ist die in § 67—69 betrachtete Anordnung — bei welcher je die Vierecke 1 2 3 4 und 1′ 2′ 3′ 4′ harmonisch sind und die Schnittpunkte 1 3 3′ 1′ bez. 2 4 4′ 2′ auf $\mathbf{k}_a$ bez. $\mathbf{k}_i$, den Inversionskreisen von i und i'', sich bewegen — nicht die einzig mögliche dieser Art, sondern es giebt deren sechs im Ganzen, welche in drei reciproke Gruppen zerfallen.

[2] Der Kürze des Ausdrucks wegen, sollen die zwölf Kreise, auf denen je vier Schnittpunkte zweier orthogonaler Ovale liegen, in der Anordnung von § 63,21, wie folgt bezeichnet werden:

$$\begin{array}{lcl} (\mathbf{k},\ \mathbf{k}')\ \times & : & (\mathbf{k}^a,\ \mathbf{k}_i) \\ (\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}'_1)\ : & \times & (\mathbf{k}^{a_1},\ \mathbf{k}_{i_1}) \\ (\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}'_2)\ \times & : & (\mathbf{k}^{a_2},\ \mathbf{k}_{i_2}) \end{array}$$

Unter denselben sollen die Kreispaare, welche die harmonischen

Vierecke enthalten bez. die festen Orts-Kreise bilden, durch die Bezeichnung k bez. $\mathbf{k}$ hervorgehoben werden.

3 Bei der oben behandelten Zuordnung bilden $\mathbf{k}^{a_1}$ und $\mathbf{k}^{i_1}$ *) den geometrischen Ort für die Schnittpunkte konjugierter Ovale zweiter Art, und je ihre beiden harmonischen Vierecke liegen auf Kreisen k_1 und k'_1 des orthogonalen Büschels.

4 Letzteres enthält nun zwei Kreise $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}'_1$, welche nach § 68,2 auf $\mathbf{k}^{a_1}$ und $\mathbf{k}^{i_1}$ und folglich auf allen Kreisen k^{a_1} und k^{i_1} dieses Büschels harmonische Vierecke bestimmen**). Die orthogonalen Ovale können also auch so zu konjugierten zweiter Art zusammengestellt werden, dass $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}'_1$ die Ortskreise und k^{a_1} und k^{i_1} die Kreise der harmonischen Vierecke ihrer Schnittpunkte sind.

5 Die gleichen Kreise $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}'_1$ sind leicht zu konstruieren, da sie auch i' in einem harmonischen Viereck und zwar einem Quadrate schneiden, und also ihre Radien gleich i' sind.

6 Obige Zuordnung (3) und letztere (4) sind reciprok, d. h.: die beiden Ortskreise der ersteren gehören zum Kreisbüschel der harmonischen Vierecke der letzteren, und umgekehrt: das orthogonale Kreisbüschel der harmonischen Vierecke der ersteren enthält die Ortskreise der letzteren.

7 Die Kreise $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}'_1$ bestimmen auch auf i bez. i'' harmonische Vierecke. Erstere Kreise werden von $\mathbf{k}^a$ und $\mathbf{k}^i$ bez. $\mathbf{k}^{a_2}$ und $\mathbf{k}^{i_2}$, welche i bez. i'' in denselben, also in vier harmonischen Punkten orthogonal schneiden, berührt. Die Kreise $\mathbf{k}^a$ und $\mathbf{k}^i$ bez. $\mathbf{k}^{a_2}$ und $\mathbf{k}^{i_2}$ schneiden also nach dem Obigen nicht nur i bez. i'', sondern

---

*) In § 67 bis § 69 sind diese Kreise der Einfachheit wegen ohne den Index 1 mit $\mathbf{k}_a$ und $\mathbf{k}_i$ bezeichnet worden. Dieselben sind nicht mit den Kreisen $\mathbf{k}^a$ und $\mathbf{k}^i$, welche unter (7) auftreten, zu verwechseln!

**) Denn es gilt für jedes Doppelverhältnis der Satz:

Zwei Kreise schneiden alle Kreise ihres orthogonalen Büschels in Vierecken von konstantem Doppelverhältnis.

Beweis: Durch eine inverse Transformation können die beiden Kreise, je nachdem sie sich schneiden oder nicht, nach § 39,2–4 in zwei Gerade oder koncentrische Kreise verwandelt werden. In ersterem Falle geht das orthogonale Büschel in ein koncentrisches und die Vierecke in die Ecken ähnlicher Rechtecke über; in letzterem Falle wird das Büschel in ein durch das Centrum gehendes Strahlenbüschel und die Vierecke in kongruente symmetrische Punktgruppen übergeführt. Die transformierten Vierecke stimmen mithin in den Doppelverhältnissen überein, folglich nach § 43,2 auch die ursprünglichen.

alle Kreise k und k' bez. k_2 und k'_2 ihres orthogonalen Büschels in harmonischen Vierecken.

Unter letzteren Kreisen wiederum giebt es zwei gleiche, sich rechtwinklig durchdringende **k** und **k'** bez. $\mathbf{k}_2$ und $\mathbf{k}'_2$ (die Inversionskreise von i und i''' bez. i'' und i'''), welche erstere und mithin alle Kreise k^a und k^i bez. k^{a_2} und k^{i_2} ihres orthogonalen Büschels, also auch i'' bez. i, in harmonischen Vierecken schneiden.

In (7) sind zwei weitere Zuordnungen und in (8) ihre reciproken gegeben:

Es giebt also s e c h s *Zuordnungen orthogonaler Ovale zu konjugierten Paaren* z w e i t e r *Art* $\mathbf{O}^{\mathrm{II}}$ $\mathbf{O}^{\mathrm{II}}_0$, *welche in* d r e i *reciproke Gruppen zerfallen.* Dieselben ergeben folgende Uebersicht ihrer Ortskreise **k** und orthogonalen Kreisbüschel $\Sigma(k)$, welche die harmonischen Kreisvierecke ihrer Schnittpunkte enthalten:

X	$\Sigma(k \quad k')$ $\mathbf{k} \quad \mathbf{k}'$	$i''' \; i$	i''	$\mathbf{k}^a \quad \mathbf{k}^i$ $\Sigma(k^a \quad k^i)$	:
:	$\Sigma(k_1 \quad k'_1)$ $\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}'_1$	i'''	$i \; i''$	$\mathbf{k}^{a_1} \quad \mathbf{k}^{i_1}$ $\Sigma(k^{a_1} \quad k^{i_1})$	X
X	$\Sigma(k_2 \quad k'_2)$ $\mathbf{k}_2 \quad \mathbf{k}'_2$	$i'' \; i'''$	i	$\mathbf{k}^{a_2} \quad \mathbf{k}^{i_2}$ $\Sigma(k^{a_1} \quad k^{i_1})$	:

Je nachdem die Büschel, denen die Ortskreise angehören, Schnittpunkte oder Grenzpunkte haben, sind dieselben durch (X) oder (:) bezeichnet.

§ 71. Aus dem Vorstehenden lassen sich nun, was die K o n f i g u r a t i o n der Ortskreise **k**, ihrer Mittelpunkte **K**, Centralen u. s. w. anlangt, viele bemerkenswerte Sätze ableiten*):

---

*) Wird die ganze ebene Figur als stereographische Projektion einer sphärischen aufgefasst und rückwärts auf die Kugel vom Mittelpunkte $\mathfrak{J}'$ und Radius i' positiv invers übertragen in Bezug auf einen der Punkte $\mathfrak{J}_0$ als Inversionscentrum, in welchen der senkrecht auf der Ebene stehende Durchmesser die Kugel schneidet, so ist die Mehrzahl der folgenden Sätze ohne Weiteres einleuchtend, da als Inverse ein ganz regelmässiges sphärisches Gebilde resultiert.

Die inversen Kreise einer jeden der Gruppen i, **k**(X), **k**(:), **h**, sowie die Neigungswinkel ihrer Ebenen, sind unter sich gleich gross. Die Kreise der ersten beiden Gruppen gehen in grösste Kreise über, die der übrigen nicht. Ferner bilden nach der Transformation die Ebenen der dritten Gruppe einen Würfel, die Ebenen der vierten, sowie die Schnittpunkte der zweiten Gruppe je ein regelmässiges Oktaëder und die harmonischen Vierecke Quadrate.

Von den 12 Kreisen **k** *berühren sich 12 mal je 3 — und zwar je ein Kreis (×) einer Gruppe mit einem Kreise (:) jeder der beiden übrigen — in je einem von 12 Punkten* **B**, *welche zu je 4 sowohl auf jedem der 3 positiven Kreise i als auch auf jedem Kreise (:) und zu je 2 auf jedem Kreise (×) liegen.*

2 Die 9 mal zu je 4 auf den positiven Kreisen i und **k**(:) gelegenen Berührungspunkte **B** bilden harmonische Vierecke (§ 64,10).

3 Von den 3 Kreispaaren **k**(:) bilden je zwei in Bezug auf das dritte eine sich schliessende Reihe von 4 doppelt berührenden Kreisen (§ 39,8).

4 *Von je drei sich in einem Punkte* **B** *berührenden Kreisen* **k** *ist der Kreis (×) der positive Inversionskreis der beiden Kreise (:).*

5 *Die 12 Mittelpunkte* **K** *bilden 12 mal zu je 3 mit je einem der 12 Berührungspunkte* **B** *harmonische Punktreihen, deren Träger die positiven Kreise i in den Punkten* **B** *berühren.* Von diesen 12 Tangenten **b** fallen 4 mit der Axe i''' zusammen.

6 *Jede der 3 Gruppen von orthogonalen Kreispaaren* **k** *bestimmt die 8 Schnittpunkte* $P\alpha$ *eines harmonischen Ovalenpaares* $OH\alpha$ $OH\alpha_0$ *mit vier harmonischen Vierecken* (§ 68,2). Je zwei reciproke Zuordnungen orthogonaler Ovale zu konjugierten Paaren zweiter Art haben daher ein solches Ovalenpaar gemeinsam.

Die 4 harmonischen Vierecke eines jeden liegen auf den 4 Ortskreisen der betreffenden Gruppe.

7 *Die 6 Kreise* **k**(×) *schneiden sich zu je 3 in je zwei von den 8 Schnittpunkten* $P\beta$ *des harmonischen Ovalenpaars* $OH\beta$ $OH\beta_0$ *mit sechs harmonischen Vierecken.* Dasselbe ist daher den drei Zuordnungen gemeinsam, welche sich schneidende Ortskreise besitzen.

8 Die 3 Zuordnungen, deren Ortskreise die **k**(:) sind, haben kein gemeinsames Ovalenpaar.

9 Ausser den Tangenten **b** giebt es also noch 4 Gerade, welche je 3 Punkte **K** enthalten; dieselben sind orthogonal zu den durch J' gehenden gemeinschaftlichen Sehnen der sich schneidenden Kreistripel **k**(×).

Jedes Kreistripel bildet daher ein Büschel.

10 *Die Kreise* **k**(×) *eines jeden der 4 Kreistripel schneiden sich gleichwinklig (unter 60°); dasselbe gilt von je 3 der 6 zu ihnen orthogonalen Kreise* $k\beta$, *welche je 4 ihrer Schnittpunkte* $P\beta$ *enthalten.*

Letztere Kreistripel haben jedoch nur je einen gemeinsamen Schnittpunkt, bilden also keine Büschel.

Die 6 harmonischen Vierecke der Schnittpunkte dieses Ovalenpaares liegen auf den 3 Kreispaaren $k\beta(:)$.

Von diesen 3 Kreispaaren $k\beta$ sind die 4 Kreise je zweier Paare selbstinvers in Bezug auf den positiven Inversionskreis i des dritten und bilden eine sich schliessende Reihe, d. h. ihre Schnittpunkte eine in sich geschlossene Kette harmonischer Vierecke.

Unter den Kreisen, welche je 4 Schnittpunkte eines der 4 harmonischen Ovalenpaare verbinden, sind solche vorhanden, welche zugleich einem andern Paare angehören. *Jedes der 4 harmonischen Ovalenpaare α, α_1, α_2, β hat mit jedem der 3 übrigen zwei Schnittpunktskreise k gemeinsam.* Von diesen 12 Kreisen sind 6 Kreise $k\alpha\beta$, welche je 4 Schnittpunkte β und je 4 entsprechende Schnittpunkte eines der drei α enthalten, identisch mit den $\mathbf{k}(\times)$; die übrigen 6 Kreise $k\alpha\alpha$, auf welchen je 8 Schnittpunkte α liegen, gehören paarweise zu den drei Büscheln $\Sigma(:)$.

Werden diese 6 Kreispaare der Kürze halber nur durch ihre Indices bezeichnet und nach den Schnittpunkten in derselben Weise angeordnet, wie dies in § 63,21 und § 70,2 geschehen ist, so ergiebt sich folgende Uebersicht:

$$\begin{array}{llll} (\beta \equiv \alpha) & \times & : & (\alpha_1 \equiv \alpha_2) \\ (\alpha_2 \equiv \alpha) & : & \times & (\beta \equiv \alpha_1) \\ (\beta \equiv \alpha_2) & \times & : & (\alpha \equiv \alpha_1)\,. \end{array}$$

Dieselbe gewinnt durch Vertauschung der mittleren Paare an Regelmässigkeit, denn dann stehen links die drei Kreispaare $k\alpha\beta \equiv \mathbf{k}$ und rechts die drei Paare $k\alpha\alpha$. Die Kreise der letzteren Paare enthalten kein, die der ersteren dagegen je ein harmonisches Viereck.

Von den 8 mal 4 homologen Schnittpunkten $\mathbf{P}$ der 4 harmonischen Ovalenpaare α, α_1, α_2, β gelten folgende Sätze:

Je 3 homologe Schnittpunkte $\mathbf{P}\alpha$ liegen auf einem von 8 Kreisen $\mathbf{h}$, von denen jeder 3, durch den homologen Punkt $\mathbf{P}\beta$ gehende Kreise $\mathbf{k}(\times)$ orthogonal schneidet und mithin 3 ihrer orthogonalen Kreise $\mathbf{k}(:)$ in den obigen homologen Punkten $\mathbf{P}\alpha$ berührt.

Je zwei von 3 homologen Punkten $\mathbf{P}\alpha$ liegen mit dem Mittelpunkt $\mathbf{K}$ des Kreises $\mathbf{k}(\times)$, welcher durch den jeweiligen dritten

Punkt geht, in einer Geraden, und durch jeden der betreffenden Mittelpunkte gehen 4 solcher Geraden.

17 *Die 8 Kreise* **k** *gehören paarweise den orthogonalen Büscheln der 4 Kreistripel* **k**(χ) *an, welche sich je in zwei Punkten* **P**β *schneiden.* Die 4 Paare von Grenz- bez. Schnittpunkten der ersteren bez. letzteren Büschel, nur durch ihre Indices bezeichnet, sind:

$$1\ 3' \qquad 1'\ 3 \qquad 2\ 4' \qquad 2'\ 4.$$

18 Von den 8 homologen Punktpaaren, welche die **P**β mit den Mittelpunkten **H** der Kreise **h** bilden, liegen daher je 2 Paare auf einer von 4 durch J' gehenden Geraden.

1 § 72. Die Kreise i und i'', deren Schnittpunkte mit S und S' bezeichnet werden mögen, sind nach § 36,2 die Inversionskreise ihrer Potenzaxe **r** und des über ihrer Centrale $J\ J''$ als Durchmesser beschriebenen Kreises **r'**.

2 Zwei orthogonale Ovale $\mathbf{O}^{III}$ $\mathbf{O}^{III}_0$ nun, welche sich auf **r** und **r'** in je 4 Punkten schneiden, sollen konjugierte orthogonale Ovale d r i t t e r Art (§ 64,1) genannt werden.

3 Auch bei dieser Art der Zuordnung findet, wie bei den in § 64 und § 66 behandelten, ein v o l l s t ä n d i g e s Entsprechen der beiden Kurvenbüschel statt.

4 Ganz analog dem für konjugierte Ovale z w e i t e r Art geltenden Satze über harmonische Vierecke (§ 67,6) folgt daher unter Berücksichtigung der Anmerkung **) auf Seite 103 aus obiger Definition:

Für alle Paare konjugierter Ovale d r i t t e r Art ist das Doppelverhältnis $\nu = (1\ 2\ 3\ 4) = (1'\ 2'\ 3'\ 4')$ *der beiden Kreisvierecke, welche von ihren, je auf einer Seite der Axe liegenden, Schnittpunkten gebildet werden, k o n s t a n t, und zwar gleich dem negativ genommenen Verhältnisse der positiven Potenzen, welche den Brennpunkten* J'' *und* J *zukommen.* Letzteres ist leicht zu erweisen:

5 Nach dem Obigen (1) schliessen **r** und **r'** mit i gleiche Winkel ε ein. Durch eine inverse Transformation in Bezug auf S als Centrum gehen die beiden Vierecke in Rechtecke von demselben Doppelverhältnis ν über, deren Diagonalen sich unter dem Winkel $2\,\varepsilon$ schneiden. Es ist daher mit Berücksichtigung des Vorzeichens:

$$\nu = -\operatorname{tang}^2 \varepsilon.$$

Da nun ferner Winkel $SJJ'' = \varepsilon$, also

$$\operatorname{tang}^2 \varepsilon = -\frac{i''^2}{i^2} = -\frac{p''}{p}$$

ist, so ergiebt sich, wie zu beweisen war:

$$v = -\frac{p''}{p}.$$

§ 73. Die orthogonalen Büschel konfokaler Cartesischer Ovale sind oben, was die Entfernungen der drei Brennpunkte, sowie ihre Potenzen anlangt, ganz allgemein betrachtet worden. Es erübrigt noch, einige Specialfälle kurz zu charakterisieren:

I. Von besonderem Interesse ist der Fall, für welchen

$$J''J' = J'J \qquad \text{oder} \qquad p'' = -2p' = p$$

ist, da dann die beiden orthogonalen Büschel ausser i''' noch $\mathbf{r}$ (§ 72,1) zur Symmetrieaxe haben. Es ergiebt sich:

Die beiden Kurvenbüschel sind einander symmetrisch und je zwei symmetrische Ovale $\mathbf{O} \equiv \mathbf{O}_0$ *sind zugleich konjugierte Ovale erster, zweiter und dritter Art.*

Das System der beiden orthogonalen Büschel $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_0$ *ist selbstinvers in Bezug auf sechs Inversionskreise,* von denen jedoch ein positiver und der negative in einen Kreis $\mathbf{r}' \equiv i'$ zusammenfallen*).

Von diesen 6 Inversionskreisen bilden die 4 positiven $i\ \mathbf{r}'\ i''\ \mathbf{r}$ *ein Büschel* (χ), *das sowohl in Bezug auf den positiven Inversionskreis* i''' *als auch in Bezug auf den negativen* i' *selbstinvers ist* (§ 53,6).

II. Fallen von den drei Brennpunkten zwei zusammen, ist also

$$J'J = 0 \qquad \text{mithin} \qquad p = 0,$$

wenn J'' im Endlichen liegt, so gehen die orthogonalen Büschel der Ovale O_0 bez. O in solche Pascal'scher Schnecken mit dem

Knotenpunkt bez. isoliertem Punkt

*) Da je zwei symmetrische Ovale, als konjugierte erster Art, ein Paar von Kreisen $\mathbf{c}$ besitzen, welche mit jedem der beiden Ovale in doppelter Berührung sind, so folgt unter Berücksichtigung von § 61,3 durch Inversion:

Zwei orthogonale bicirculare Kurven, deren System in Bezug auf sechs Kreise i selbstinvers ist, haben ein Paar von Kreisen $\mathbf{c}$ *gemeinsam, welche mit jeder der beiden Kurven in doppelter Berührung sind.*

Gehört ein solcher Kreis $\mathbf{c}$ *in Bezug auf die eine Kurve zu einer nach m Umläufen mit dem n*ten *Kreise sich schliessenden Reihe von Kreisen, von denen jeder die Kurve doppelt und seine Nachbarkreise berührt, so ist ganz dasselbe bei der orthogonalen Kurve der Fall.*

$J' \equiv J$ über, in welchem der mittlere Brennpunkt mit dem
äusseren bez. inneren
der Büschel sich deckt*).

6 Werden die drei Ordnungskreise, von welchen die Kreisscharen c einer jeden Kurve negative Inversionskreise sind, (§ 57,12—20) mit $\mathfrak{i}$ bezeichnet, so folgt:

Die Scharen der Kreise
e''_0 und $\mathfrak{i}''_0$ bez. e'' und $\mathfrak{i}''$
berühren i'' im Punkte $J' \equiv J$
innerlich bez. äusserlich.

7 Die vier Scharen bilden daher einen Kreisbüschel mit Berührungspunkt.

8 Da von den Brennpunkten zwei zusammenfallen, so sind auch von den Kreisscharen identisch:
$\mathfrak{i}'_0 \equiv \mathfrak{i}_0$, $e'_0 \equiv e_0$, $c'_0 \equiv c_0$ bez. $\mathfrak{i}' \equiv \mathfrak{i}$, $e' \equiv e$, $c' \equiv c$,
und es liegt $J' \equiv J$

9 ausserhalb bez. innerhalb
der betreffenden Kreise $\mathfrak{i}$ und e.

10 III. Decken sich alle drei Brennpunkte, ist also
$$J''J' = 0 = J'J \quad \text{und} \quad p'' = 0 = p \;,$$
so degenerieren die orthogonalen Ovalenbüschel in orthogonale Büschel von Cardioiden.

11 Für jedes der beiden Kurvenbüschel sind je die 3 Scharen der $\mathfrak{i}$, e und c in eine vereinigt, und es ist $J'' \equiv J' \equiv J$ der Berührungspunkt sämmtlicher Kreise $\mathfrak{i}$ und e.

12 Nach § 61,1 wird das Cartesische Oval als selbstinverse Kurve in Bezug auf einen der Brennpunkte als Centrum durch eine inverse Transformation von beliebiger Potenz q in eine ähnliche Kurve, also wieder in ein Cartesisches Oval, übergeführt, wobei das Aehnlichkeitsverhältnis gleich dem der Potenzen ist. Da dies natürlich auch von den soeben behandelten Specialfällen gilt, so folgt:

13 In Bezug auf J'' als Inversionscentrum von der Potenz q'' gehen die orthogonalen Büschel Pascal'scher Schnecken, da das Aehnlichkeitsverhältnis $\mu'' = q'' : p''$ endlich ist, wieder in solche über.

14 In Bezug auf $J' \equiv J$ als Centrum von der Potenz q dagegen

*) Der Specialfall $\mathfrak{J}''\mathfrak{J}' = 0$ liefert nichts Neues, sondern es findet nur eine Vertauschung der beiden Arten von Pascal'schen Schnecken statt.

— in welchem Falle, da $p = 0$ ist, das Aehnlichkeitsverhältnis $\mu = q : p = \infty$ wird — ergiebt sich nach § 46,6 als Inverse der Pascal'schen Schnecke (mit Knoten- oder isoliertem Punkt) ein Kegelschnitt (Hyperbel oder Ellipse).

Nach Obigem (12) ist also der inverse Kegelschnitt ebenfalls als eine ähnliche Pascal'sche Schnecke aufzufassen. Dieser scheinbare Widerspruch wird durch die Bemerkung aufgeklärt, dass, da $\mu = \infty$ ist, dem im Endlichen liegenden Kegelschnitt nur der Knotenpunkt bez. der isolierte ähnlich entspricht*).

Da nach § 35 die transformierte Figur wieder selbstinvers in Bezug auf die Kreise ist, welche den positiven Inversionskreisen i'' und i der ursprünglichen entsprechen, so ergeben sich durch Inversion in Bezug auf J' als Centrum aus vorliegenden Specialfällen II und III die weiteren:

II'. Rückt ein Brennpunkt J'' in's Unendliche, ist also

$$J''J' = \infty \qquad \text{und} \qquad p'' = \infty = p\,,$$

so resultieren orthogonale Büschel in Bezug auf J' und J konfokaler Hyperbeln und Ellipsen.

III'. Liegen beide positive Brennpunkte im Unendlichen, ist also

$$J''J = \infty = J'J \qquad \text{und} \qquad p'' = \infty = p\,,$$

so ergeben sich orthogonale Büschel konfokaler Parabeln.

IV. Liegt endlich ein Brennpunkt im Unendlichen, und fallen die beiden andern zusammen, ist also

$$J''J' = \infty\,,\; J'J = 0 \qquad \text{und} \qquad p'' = \infty\,,\; -p' = p\,,$$

so degenerieren die orthogonalen Ovalenbüschel, da nach § 58,6 die Kreise e und i koncentrisch sind, in die Büschel koncentrischer Kreise und orthogonaler, also durch J gehender Geraden.

§ 74. Die bisher betrachteten Büschel Cartesischer Ovale haben im allgemeinen drei reelle Brennpunkte und jede Kurve derselben schneidet die Axe in vier reellen Punkten. Nach § 63,14 bilden hierbei die beiden Kreisscharen e''_0 e'' und der Kreis i'' ein Büschel mit den Grenzpunkten J' und J.

Im Specialfalle der Berührung dieser Kreise, decken sich zwei Brennpunkte (§ 73,5—6).

---

*) Der innerhalb des unendlich kleinen Kreises i liegende Teil des speciellen Ovales löst sich gleichsam bei unendlicher Vergrösserung in eine dem inversen Kegelschnitt ähnliche Hyperbel oder Ellipse auf.

2 *Besitzt jedoch das vom Kreise i und den Scharen e''_0 e gebildete Büschel Schnittpunkte, so werden die beiden Brennpunkte J' J imaginär, und die orthogonalen Ovalenbüschel haben nur noch einen reellen Brennpunkt J''**).

3 Nicht die ganzen Kreise e'' e''_0 sind die Mittelpunkts orte der Kreise c'' c''_0, sondern nur die ausserhalb i'' liegenden Teile derselben. Jedes Oval schneidet daher die Symmetrieaxe nur in zwei Punkten.

4 Da die beiden Brennpunkte J' und J imaginär sind, so existieren auch die beiden Kreisbüschel VI' und V nicht (vergl. § 58,2), und es folgt:

5 *Schneidet ein Cartesisches Oval seine Symmetrieaxe in zwei Punkten, so ist es die Enveloppe von nur einem Kreisbüschel V'', dessen Ordnungskreise* i'' *und i'' sich auf dem Mittelpunktskreis e'' schneiden.*

6 Die Kreise e'', deren Mittelpunkte E auf einer Seite von J'' liegen, bilden die Mittelpunkts orte des einen Kurvenbüschels **B** und die e''_0, deren Mittelpunkte E_0 auf der andern Seite von J'' sich befinden, gehören dem konfokalen Büschel $\mathbf{B}_0$ an. Insbesondere zählt die Potenzaxe und der Kreis i'' des Kreisbüschels e'' e''_0 zu den Mittelpunkts orten beider Systeme.

7 *Der Kreis i'' und zwei Punkte S S' desselben als Schnittpunkte des Kreisbüschels e'' e''_0 bestimmen also zwei Büschel konfokaler, sich orthogonal durchdringender Cartesischer Ovale mit einem reellen und zwei imaginären Brennpunkten. Durch jeden Punkt der Ebene gehen nur zwei Kurven derselben.* Zu den degenerierten Kurven der Büschel gehört je ein durch S S' begrenzter Kreisbogen von i'' und der je nach der andern Seite von J'' in's Unendliche sich erstreckende Strahl $J''\infty$ bez. $\infty J''$ der Axe.

---

*) Obwohl Des Cartes' Untersuchungen sich nur auf Ovale mit drei reellen Brennpunkten erstreckten, so sollen doch, in weiterem Sinne, auch die Kurven mit einem rellen und zwei imaginären Brennpunkten Cartesische Ovale heissen.

Des Cartes behandelte nämlich ~~diese~~ jene Kurve als den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten durch die Relation $a\,r' - b\,r'' = c^2$ verbunden ist. (Vergl. unsere bipolare Gleichung § 59,11.) Diese Erzeugungsweise gilt aber nur für Ovale mit drei reellen Brennpunkten.

Die Orthogonalität der beiden Kurvenbüschel ist leicht zu erweisen: Es seien P_1 und P_2 zwei in Bezug auf J'' inverse Schnittpunkte der beiden Ovale O und O_0. Schneiden sich nun, was die Kurve O anlangt, die beiden Normalen bez. Tangenten der Punkte P_1 und P_2 in C bez. D, so ist nach § 24,1 der durch $C\ P_1\ D\ P_2$ gehende Kreis g orthogonal zu i''. Da ferner $P_1 P_2$ die in C an den Kreis e'' gezogene Tangente nach § 58,7 rechtwinklig schneidet, so sind die Kreise g und e'' ebenfalls orthogonal. Folglich schneidet g sämmtliche Kreise des Büschels $e''\ i''\ e''_0$ orthogonal, und sein Mittelpunkt G liegt mithin auf der Potenzaxe $S\ S'$ von e'' und i''. 8

Werden P_1 und P_2 als Punkte des Ovals O_0 aufgefasst, so müssen in gleicher Weise die Schnittpunkte C_0 und D_0 der betreffenden Normalen und Tangenten mit $P_1\ P_2$ auf einem Kreise g_0 liegen, dessen Mittelpunkt G_0 also ebenfalls der Potenzaxe angehört. Da nun die Mittelnormale von $P_1\ P_2$ und die Potenzaxe $S\ S'$ den Mittelpunkt $G \equiv G_0$ eindeutig bestimmen, so deckt sich der Kreis g_0 mit g und mithin auch das Punktpaar $C_0\ D_0$ mit $D\ C$. Die Normalen und Tangenten des Ovals O_0 sind also identisch mit den Tangenten und Normalen des Ovals O, und es ist somit die Orthogonalität beider Kurvensysteme bewiesen. 9

Die Kurven je eines Büschels schliessen sich ein, aber je zwei orthogonale Kurven schneiden sich in vier reellen Punkten. Insbesondere wird die Axe und der Kreis i'' von jeder Kurve in zwei reellen Punkten durchschnitten. Diese Schnittpunkte zählen doppelt, da die betreffenden Teile der Axe und des Kreises i'' von den degenerierten Kurven doppelt durchlaufen werden. 10

Während bei den in § 73 behandelten Specialfällen II, II' und IV, welche zwei getrennte reelle Brennpunkte haben, die beiden orthogonalen Kurvenbüschel wesentlich in ihrer Gestaltung von einander abweichen, sind die Kurvenbüschel, welche einen reellen und zwei imaginäre Brennpunkte besitzen, analog denen mit drei reellen Brennpunkten oder einem (dreifachen), wie in den Specialfällen III und III', von ein und derselben Art.

Auch für diese Ovale lassen sich Schliessungssätze und solche über harmonische Beziehungen u. s. w. aufstellen; eine analoge Behandlung wie oben würde jedoch zu weit führen und soll deshalb unterbleiben. 11

1 § 75. I'. Von besonderem Interesse ist der Specialfall, für welchen die Potenzaxe $S\ S'$ durch J'' geht, da dann die beiden orthogonalen Büschel ausser der Axe i''' noch die Potenzlinie $\mathbf{r}'''$ zur Symmetrieaxe haben. Es ergiebt sich leicht:

2 *Die beiden Kurvenbüschel sind einander symmetrisch und je zwei symmetrische orthogonale Ovale* $\mathbf{O}' \equiv \mathbf{O}'_0$ *schneiden sich auf der Potenzaxe in vier Punkten.*

3 *Das System der beiden orthogonalen Kurvenbüschel* $\mathbf{B}' \equiv \mathbf{B}'_0$ *ist selbstinvers in Bezug auf sechs Kreise,* von denen jedoch der negative mit dem positiven i'' in einen Kreis $\mathbf{r}'' \equiv i''$ zusammenfällt.

4 *Von diesen sechs Inversionskreisen bilden die vier positiven* $\mathbf{r}\ i''\ \mathbf{r}'\ i'''$ *ein Büschel* (χ), *das sowohl in Bezug auf den negativen* $\mathbf{r}''$ *als auch in Bezug auf den positiven* $\mathbf{r}'''$ *selbstinvers ist.*

5 Wird das Gebilde der sechs Inversionskreise dieses Specialfalles (I') mit dem analogen (I), in § 73,1—4 behandelten, verglichen, so folgt:

Die Gebilde von sechs Inversionskreisen, welche den einander symmetrischen, orthogonalen Büscheln Cartesischer Ovale mit drei reellen bez. einem reellen und zwei imaginären Brennpunkten zukommen, sind ähnlich und nur der Lage nach um 90° gegenseitig gedreht. Daher ergiebt sich:

6 *Ein und dasselbe derartige Gebilde von sechs Inversionskreisen bestimmt zwei verschiedene Systeme von Paaren einander symmetrischer, orthogonaler Büschel Cartesischer Ovale, von denen das eine System drei reelle, das andre einen reellen und zwei imaginäre Brennpunkte besitzt.*

7 *Jedes der beiden Systeme ist in Bezug auf das andre das System isogonaler* $\pm$ *45° Trajektorien.* Durch jeden Punkt der Ebene gehen also vier, sich gleichwinklig schneidende Cartesische Ovale besonderer Art.

8 Das Gebilde der sechs Inversionskreise ist auf zweierlei Weise bezeichnet worden, je nachdem es zum Ovalenbüschel (I) mit drei reellen, bez. (I') mit einem reellen und zwei imaginären Brennpunkten gehört. Werden beide, je einem Kreise zukommende Bezeichnungen über einander gesetzt, so ergiebt sich folgende Uebersicht:

9

	+	+				−
(I)	i'''	i, r, i'', r'			=	i'
(I')	r'''	r', i''', r, i''			=	r''

Die vier in der Mitte stehenden Kreise bilden das Büschel (X) sich gleichwinklig schneidender Kreise, welches in Bezug auf jeden der beiden andern selbstinvers ist (4).

1 § 76. Wird ein Cartesisches Oval in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Pol invers transformiert, so geht die Kurve im Allgemeinen in eine bicirculare Kurve über.

2 Ist der Transformationspol ein Punkt eines der positiven Inversionskreise, so hat die bicirculare Kurve eine Symmetrieaxe. Wird als Pol ein Schnittpunkt zweier positiver Inversionskreise gewählt, so ist die transformierte Kurve symmetrisch in Bezug auf zwei Axen. Dasselbe gilt für die ganzen konfokalen orthogonalen Büschel. Letztere können in dem in § 73,1—4 und § 75 behandelten Specialfall sogar vier Symmetrieaxen besitzen, nämlich dann, wenn einer der beiden Schnittpunkte des Inversionskreisbüschels als Pol genommen wird (Vergl. 78,4).

3 *Die bicirculare Kurve kann als Enveloppe von Kreisen definiert werden, welche einen festen Kreis orthogonal schneiden und deren Mittelpunkte auf einem Kegelschnitte liegen.* Dies lässt sich wie folgt beweisen:

4 Es sei das Cartesische Oval die Enveloppe der Kreise c_1, welche den Kreis i_1 zum Orthogonalkreis und den Kreis e_1 zum Mittelpunktsort haben. In Bezug auf den Inversionskreis **i** vom Centrum **J** seien c_2 und i_2 die inversen Kreise von c_1 und i_1, ferner **r** die Potenzaxe der Kreise i_1 **i** i_2.

5 Da die Verbindungsgerade d der Schnittpunkte S_1 des Kreises c_1 mit i_1 die Polare von C_1 in Bezug auf i_1 ist, so besitzt der Kreis e_1 als reciproke Polare einen Kegelschnitt k_1, welcher J_1 zu einem Brennpunkte hat. In gleicher Weise sind die noch unbekannten Kurven c_2 und k_2 polarreciprok in Bezug auf i_2.

6 Da nun die Schnittpunktpaare S_1 S'_1 und S_2 S'_2 der Kreispaare c_1 i_1 und c_2 i_2 invers in Bezug auf den Kreis **i** sind, also die Geraden S_1 S_2 und S'_1 S'_2 durch **J** gehen, und da ferner S_1 S'_1 und S_2 S'_2 sich auf der Potenzaxe **r** schneiden, so sind d_1 und d_2 und mithin auch ihre Enveloppen k_1 und k_2 collineare Figuren, welche **J** als Collineationscentrum und **r** als Collineations-

7 axe besitzen. Sowohl bei der Collineation als auch bei der Verwandtschaft der reciproken Polaren entsprechen sich stets Kegelschnitte gegenseitig. Daher ist k_2 ebenfalls ein Kegelschnitt, und nach Obigem auch e_2, der Mittelpunktsort der Kreise, welche von einer bicircularen Kurve umhüllt werden.

8 Dieses Resultat wird noch einfacher erhalten wie folgt: Die Tangenten der Kreise i_1 und i_2, welche je einem inversen Punktpaare S_1 S_2 und S_1' S_2' zukommen, schneiden sich auf der Potenzaxe der Kreise. Es sind daher die Tangenten und mithin auch, als Schnittpunkte derselben, C_1 und C_2 collinear, und es ergiebt sich:

9 *Wird ein Cartesisches Oval O_1 invers in eine bicirculare Kurve O_2 übergeführt, so ist der Mittelpunktskegelschnitt e_2 der letzteren dem Mittelpunktskreis e_1 des Ovals collinear in Bezug auf* **J** *als Centrum und die Potenzaxe der entsprechenden Orthogonalkreise i_1 und i_2 als Axe.*

Dasselbe gilt für zwei inverse bicirculare Kurven.

10 Besitzt die bicirculare Kurve drei Mittelpunktskegelschnitte, so haben alle drei nicht nur dasselbe Collineationscentrum, sondern auch dieselbe Axe.

1 § 77. Die bicircularen Kurven im allgemeinen und die Cartesischen Ovale im besonderen stehen, wie sich unten ergeben wird, mit den sphärischen Kegelschnitten*), in welchen Kegel zweiten Grades von einer koncentrischen Kugel geschnitten werden, in innigstem Zusammenhange. Zwischen diesen Kurven wiederum und den sogenannten Sinus amplituden- und Cosinus amplituden-Kurven**), welche bei conformer Abbildung mittelst elliptischer Funktionen aus orthogonalen Parallelstrahlenbüscheln erhalten werden, besteht ganz dieselbe Verwandtschaft, so dass hierdurch die Identität letzterer mit gewissen bicircularen Kurven aufgedeckt wird.

---

*) Ueber sphärische Kegelschnitte vergleiche:
Salmon-Fiedler, *Analyt Geom. des Raumes,* I. Theil, Kap. X.
W. Fiedler, *Darstellende Geometrie,* 3. Aufl. 1883, Bd. II. p. 270; Bd. III. p. 523.
Chr. Wiener, *Darstellende Geometrie,* 1887, Bd. II. p. 268.

**) G. Holzmüller, *Isogonale Verwandtschaften und conforme Abbildungen,* 1882. Kap. XV behandelt die Abbildungen $\mathbf{Z} = \sin \operatorname{am} \mathbf{z}$ und $\mathbf{Z} = \cos \operatorname{am} \mathbf{z}$ u. s. w.

Ein sphärischer Kegelschnitt zerfällt in zwei getrennte kongruente Aeste k. Er ist mit seinen vier Brennpunkten $F' F''$ in Bezug auf den Mittelpunkt J' der Kugel centrisch und in Bezug auf drei sich orthogonal schneidende Ebenen grösster Kreise $i''' \; i'' \; i$ symmetrisch. Von den Kreisen sei i''' derjenige, welcher die vier Brennpunkte enthält, i'' derjenige, welcher die Kurvenäste ebenfalls schneidet und i derjenige, welcher die Kurve nicht schneidet. 2

In Bezug auf letztere Symmetrieebene ist die orthogonale Projektion des sphärischen Kegelschnitts eine Ellipse k'. Dieselbe wird von den Ebenen der Kugelkreise c, welche den sphärischen Kegelschnitt k umhüllen, berührt. Die Kugelkreise c schneiden i orthogonal. Bezeichnen C die Mittelpunkte der Kugeln, welche die gegebene in den Kreisen c orthogonal schneiden, so beschreibt C in der Ebene i die Polarreciproke e' der ebenen Ellipse k', also auch eine Ellipse. 3

Beide Ellipsen e' und k' sind koncentrisch und ähnlich, ihre Axen jedoch um 90^0 gegen einander gedreht. 4

Wird nun in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Kugel (**k**) die stereographische Projektion des sphärischen Gebildes ermittelt, so resultiert ein planes Gebilde in einer Ebene, welche der Tangentialebene des Pols parallel ist. Hierbei werden der Kreis i und die Kreisschar c wieder in Kreise i_1 und c_1 invers transformiert. Den Kugeln (c), welche die gegebene (**k**) in den Kreisen c orthogonal schneiden, entsprechen Kugeln (c_1), welche die inverse Ebene ($\mathbf{k}_1$) in den Kreisen c_1 orthogonal durchdringen. Da nun die Mittelpunkte inverser Kugeln in Bezug auf den Transformationspol perspektivisch sind, so liegen die Mittelpunkte C_1 der Kugeln (c_1) und also auch der Kreise c_1 da, wo die durch die Punkte C gehenden Inversionsstrahlen die Ebene schneiden. Die Punkte C beschreiben eine ebene Ellipse e', folglich ist die Kurve e_1 der Mittelpunkte der Kreise c_1, welche i_1 orthogonal schneiden, als perspektivische ebene Kurve zu e', ebenfalls ein Kegelschnitt. 5

Es folgt also nach § 76,3: *Die stereographische Projektion eines sphärischen Kegelschnitts ist eine bicirculare Kurve.* 6

Je nachdem der Transformationspol innerhalb, auf, oder ausserhalb eines Kurvenastes des sphärischen Kegelschnitts liegt, ist der Kegelschnitt e_1 eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. 7

8 Speciell für einen Brennpunkt der sphärischen Ellipse als Projektionscentrum ist die Ellipse e_1 ein Kreis*).

9 Da nun durch zwei diametrale Punktpaare F' und F'' einer Kugel zwei Büschel orthogonaler sphärischer Kegelschnitte bestimmt sind, so folgt:

Die orthogonalen konfokalen Büschel Cartesischer Ovale mit drei reellen Schnittpunkten sind die stereographischen Projektionen der orthogonalen konfokalen Büschel sphärischer Kegelschnitte in Bezug auf einen Brennpunkt derselben als Projektionscentrum.

10 Ferner ist in Bezug auf den Mittelpunkt eines Astes des sphärischen Kegelschnitts die Ellipse e_1 dem Kreise i_1 koncentrisch. Da in diesem Falle, wie Holzmüller**) bewiesen hat, die stereographischen Projektionen der sphärischen Kegelschnitte Sinus amplituden-Kurven sind, so folgt für letztere der Satz:

11 *Die Sinus amplituden-Kurve ist eine bicirculare Kurve, und zwar die Enveloppe von Kreisen, welche einen Kreis i orthogonal schneiden und eine koncentrische Ellipse zum Mittelpunkts haben.*

12 Die orthogonalen Büschel von Sinus amplituden-Kurven können daher durch Inversion aus den orthogonalen Büscheln Cartesischer Ovale mit drei reellen Brennpunkten erhalten werden, und zwar in Bezug auf jeden der vier Punkte, in welchen die positiven Inversionskreise i i'' die Axe i''' schneiden.

*) Bezeichnen α, β, ε die Halbaxen und die Excentricität der sphärischen Ellipse **k** und r den Radius der Kugel (**k**), so besteht, da α, β, ε ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck bilden, die Gleichung

$$\cos\alpha = \cos\varepsilon \cos\beta.$$

Ferner hat die ebene Ellipse **e'** die Halbaxen

$$a = r : \sin\beta \qquad \text{und} \qquad b = r : \sin\alpha,$$

von denen letztere in der Brennpunktsebene der sphärischen Ellipse liegen. In Bezug auf einen Brennpunkt derselben als Centrum ergeben sich als stereographische Projektionen der beiden a und b auf die, durch den Kugelmittelpunkt gehende Ebene ($\mathbf{k}_1$), welche auch die Halbaxen a enthält, die Strecken

$$b_1 = r \cos\varepsilon : (\sin\alpha \pm \cos\varepsilon) \qquad \text{und} \qquad a_1 = a.$$

Mit Hilfe obiger Gleichung erhält man nach leichter Umrechnung

$$b_1\, b'_1 = r^2 \cos^2\varepsilon : (\sin^2\alpha - \sin^2\varepsilon) = a^2,$$

d. h.: Die Endpunkte der vier Strecken liegen auf einem Kreise. Da sie aber auch Punkte der Ellipse $\mathbf{e}_1$ sind, welche $b_1 + b'_1$ zu einem Durchmesser hat, so decken sich beide Kurven, die Ellipse $\mathbf{e}_1$ ist also ein Kreis.

**) Holzmüller, a. a. O., pag. 267.

§ 78. Von besonderem Interesse sind hier wieder die Kurvenbüschel, welche sich sowohl durch inverse Transformationen der Specialfälle I und I' von Cartesischen Ovalen $\mathbf{O}\mathbf{O}_0$ und $\mathbf{O}'\mathbf{O}'_0$ ergeben, also auch durch stereographische Projektionen aus den speciellen sphärischen Kegelschnitten, deren Brennpunkte ein Quadrat bilden, und ihren isogonalen $\pm 45^0$ Trajektorien erhalten werden. 1

Wird zum Transformationspol einer der beiden Schnittpunkte T_c des Inversionskreisbüschels oder einer der vier Punkte T_s gewählt, welche die vier Inversionskreise des Büschels ausser ihren Mittelpunkten mit der orthogonalen Inversionsgeraden gemein haben, so resultieren nach § 75,7 folgende Sätze: 2

Es sind inverse orthogonale Kurvenscharen

in Bezug auf ein Centrum T_s: 3

die Büschel **O** und die Sin am-Kurven **S**, mod $k = 3 - \sqrt{8}$,

„ „ **O'** „ „ isog. $\pm 45^0$ Trajektorien $\mathbf{T}_s$ von **S**,

in Bezug auf ein Centrum T_c: 4

die Büschel **O'** und die Cos am-Kurven **C**, mod $k = 1 : \sqrt{2}$,

„ „ **O** „ „ isog. $\pm 45^0$ Trajektorien $\mathbf{T}_c$ von **C**.

Mit Hilfe der für die Cartesischen Ovale **O** und **O'** aufgestellten Sätze können leicht entsprechende für diese bicircularen Kurvenscharen **S**, $\mathbf{T}_s$, $\mathbf{T}_c$, **C**, welche besonders auch in physikalischer Hinsicht von Bedeutung sind, gewonnen werden*). 5

---

*) Von den zahlreichen Schriften welche bicirculare Kurven und speciell Cartesische Ovale behandeln, seien angeführt:

Des Cartes, *Géometrie,* 1705, p. 86.

Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géometrie.* 4. Epoque, § 18.

A. Quetelet, *Démonstration et développement des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires,* Nouv. Memoires de l'academie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles, 1829, T. V.

John Casey, *On bicircular Quartics,* the Transactions of the Royal Irish Academy, 1871. Vol. XXIV (Science).

Fiedler, *Darstellende Geometrie,* 1885, Bd. II. p. 187.

Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. d. höheren ebenen Kurven,* 1873, p. 311.

Liguine, *Bulletin des sciences math. et astron.* 1882, Ser. 2. T. 6. p. 40.

Burmester, *Lehrbuch der Kinematik.* Bd. I. 1888, p. 68, 91, 567, 575, 872.

G. Holzmüller, a. a. O. Vergl. auch d. Fig. 62, 66; 64, 63.

O. Richter, *Ueber die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die eine bicirculare Kurve 4. Ordnung viermal berühren.* Supplement d. Zeitschrift f. Math. u. Physik, 35. Jahrgang, 1890.

Erweiterungen und Zusätze.

Fortsetzung von § 39.

9 In einer Schar von Kreisen c, welche zwei sich nicht schneidende Kreise $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ berühren, bestimmen je zwei negativ inverse Kreise $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ derselben eine neue Schar von Kreisen k, welche $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ berühren.

10 Bilden nun die Kreise c bez. k, welche die Kreise $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ bez. $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ berühren, Reihen von Kreisen, welche einander der Ordnung nach berühren, so findet das merkwürdige Gesetz statt:

Wenn sich die erste Reihe c nach einem oder mehreren Umläufen schliesst, so kehrt auch die zweite Reihe k nach einem oder mehreren Umläufen in sich zurück.

11 *Ist m_1 die Anzahl der Umläufe der ersten Reihe und n_1 die Anzahl der sie bildenden Kreise c, ferner m_2 und n_2 die Zahlen der Umläufe und Kreise k der zweiten Reihe, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation:*

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{1}{2}.$$

12 Um diesen Satz J. Steiners*), den derselbe als „einen der merkwürdigsten geometrischen Sätze“ bezeichnet, zu beweisen, werde die Ebene der Kreisscharen als stereographische Projektion der Kugel angesehen, welche mit dem negativen Inversionskreis i' von $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ Centrum J' und Radius i' gemein hat. Je zwei negativ inverse Punkte der Ebene sind dann die Centralprojektionen der Endpunkte eines Kugeldurchmessers.

Den Kreisen $\mathbf{k}_1$ u. $\mathbf{k}_2$ bez. $\mathbf{c}_1$ u. $\mathbf{c}_2$ entsprechen daher zwei gleiche und parallele Kugelkreise $\mathbf{k}'_1$ u. $\mathbf{k}'_2$ bez. $\mathbf{c}'_1$ u. $\mathbf{c}'_2$, mithin der Kreisschar c bez. k eine Schar unter sich gleicher Kreise c' bez. k' der Kugel.

13 Die von einem Berührungspunkte zweier Kreise c' u. $\mathbf{k}'$ oder $\mathbf{c}'$ u. k' ausgehenden Kreisdurchmesser bilden die Katheten

---

*) J. Steiner, Crelle's Journal, Bd. II. p. 193 oder Ges. W. Bd. 1 p. 135. W. Fiedler, *Cyklographie.* 1882. p. 236 (andrer Bew. des Satzes).

Als Beispiele seien angeführt:

n_1 n_2 = 3 6; 4 4; 5 10; 5 10; 8 8; 12 12; 16 16; 16 16; 20 20; 20 20.
m_1 m_2 = 1 1; 1 1; 1 3; 2 1; 1 3; 1 5; 1 7; 3 5; 1 9; 3 7.

eines rechtwinkligen Dreiecks, das einen Kugeldurchmesser zur Hypotenuse hat. Sind α und β die Centriwinkel der Kugel, unter welchen die Durchmesser aller Kreise c' **c'** und k' **k'** erscheinen, so bestehen die Gleichungen

$$\alpha = \frac{m_1}{n_1} \cdot 2\pi, \qquad \alpha + \beta = \pi, \qquad \beta = \frac{m_2}{n_2} . 2\pi,$$

welche durch Elimination von α und β obige Beziehung ergeben*).

Die Mittelpunkte C und K der Kreisscharen c und k beschreiben zwei Kegelschnitte. Die Brennpunkte eines jeden derselben sind zugleich die Endpunkte der grossen Axe des andern. Die beiden Kegelschnitte (**c**) und (**k**) sind entweder Ellipse und Hyperbel oder zwei Parabeln. 14

Fortsetzung von § 43.

Als weitere Anwendung mögen folgende Sätze dienen: 5

Die Eckpunkte aller Antiparallelogramme A_1 A_2 B_2 B_1 über der gemeinsamen Grundlinie $A_1A_2 = a$ von ***konstantem*** *Doppelverhältnis $v = (A_1 A_2 B_2 B_1) = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ besitzen als geometrischen Ort zwei gleiche Kreise m_1 und m_2 des Kreisbüschels, welches die Eckpunkte von a zu Grenzpunkten hat. Die beiden Kreise berühren die Diagonalen der nach beiden Seiten über a errichteten Rechtecke A_1 A_2 D_2 D_1 von demselben Doppelverhältnis v (also den Nebenseiten b) in den Ecken D_1 und D_2.* Ihre Mittelpunkte M_1 und M_2 liegen daher von den Endpunkten der Grundlinie um $a : v$ entfernt.

$$(M_1 A_1 = M_2 A_2 = b^2 : a = a : v.)$$

Beweis: Es sei A_1 A_2 B_2 B_1 ein beliebiges Antiparallelogramm über der Grundlinie A_1A_2 = a, dessen Punkte B_1 und B_2 auf den Kreisen m_1 bez. m_2 liegen. Wird in Bezug auf den Kreis vom Radius a und Centrum A_1 die Figur positiv invers transformiert, so entsprechen: den Ecken des Rechtecks A_1 A_2 D_2 D_1 (als Punkten, welche auf einem durch das Inversionscentrum gehenden Kreise liegen) bez. die Punkte ∞ A_2 D'_2 D'_1 der durch den selbstinversen 6

*) Durch Orthogonalprojektion der sphärischen Figur auf eine Symmetrieebene derselben folgt der elementare planimetrische Satz: *Beschreibt man in einen Kreis* **i** *ein regelmässiges Vieleck, dessen Seite* **c** *sei und in dieses den Kreis, dessen Durchmesser* **k** *sei, so ist für denselben Kreis* **i** *umgekehrt auch* **k** *die Seite eines regelmässigen Vielecks und* **c** *der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises.*

Nur die beiden ersten der in der Anmerkung a. S. 119 angeführten Beispiele ergeben keine Stern-Vielecke.

Punkt A_2 gehenden Geraden, welche die Diagonale A_1 D_2 senkrecht durchschneidet — den Kreisen m_1 und m_2 (da sie den umgeschriebenen Kreis des Rechtecks und mithin alle durch A_1 und A_2 gehende Kreise orthogonal schneiden), nach § 39,2 koncentrische Kreise m'_1 und m'_2 vom Mittelpunkte A_2 — und dem umgeschriebenen Kreise eines beliebigen Antiparallelogramms A_1 A_2 B_2 B_1 eine durch A_2 gehende Gerade.

Da hiernach B'_1 und B'_2, die inversen Punkte von B_1 und B_2, Schnittpunkte der koncentrischen Kreise m'_1 und m'_2 mit einer durch ihren Mittelpunkt A_2 gehenden Geraden sind, so werden die Antiparallelogramme A_1 A_2 B_2 B_1 in unter sich kongruente Punktgruppen ∞ A_2 B'_2 B'_1 übergeführt. Da letztere also dasselbe Doppelverhältnis besitzen, so ist nach § 43,2 auch das Doppelverhältnis der Antiparallelogramme konstant.

7 Da das System der Antiparallelogramme und ihrer geometrischen Orte m_1 und m_2 in Bezug auf die Mittelnormale von A_1 A_2 symmetrisch, also auch selbstinvers ist, so folgt nach § 35,1 durch eine inverse Transformation der allgemeinere Satz:

Die Eckpunkte aller Kreisvierecke über der gemeinsamen Grundlinie a von konstantem Doppelverhältnis v, deren gegenüberliegende Seiten durch einen festen Punkt S der verlängerten Grundlinie gehen, besitzen als geometrischen Ort zwei Kreise m''_1 und m''_2 des Kreisbüschels, welches die Eckpunkte von a zu Grenzpunkten hat.

Die beiden Ortskreise und die Eckpunkte der Grundlinie haben S zum gemeinschaftlichen Inversionscentrum.

8 Sie schliessen sich aus oder ein, je nachdem S auf der Verlängerung der Grundlinie a vom zunächst gelegenen Endpunkt derselben eine grössere oder kleinere Entfernung als $a : v$ besitzt. Ist dieselbe gerade gleich $a : v$, so artet einer der Ortskreise m''_1 und m''_2 in eine Gerade aus, die Mittelnormale der Grundlinie a*).

Fortsetzung von § 59.

13 In gleicher Weise lassen sich verschiedene bi- und tripolare Gleichungen für die φ aufstellen, z. B. die folgende:

$$\frac{\sin(\varphi'' - \varphi)}{e'} + \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{e''} + \frac{\sin(\varphi' - \varphi'')}{e} = 0.$$

*) Die Specialfälle dieser Sätze für harmonische Vierecke sind in der Anmerkung auf Seite 101 behandelt worden.

Druckfehler und Berichtigungen.

(1888. Programm No. 548.)

Auf Seite 13, Zeile 13 v. u. rechts lies A_{14} J_{23} statt J_{14} A_{23}.
„ „ 16, „ 6 „ „ „ „ „ „ „ „ „
„ „ 19, letzte Formel lies $i_{\max}$ statt $i_{\min}$.
„ „ 29, Zeile 12 v. o. lies § $24_{,5}$.
„ „ 37 u. 38, dritte Spalte lies **B** ϕ oder **B** $_{M}$.

(1890. Programm No. 570.)

Auf Seite 50, Zeile 1 und 4 v. unten lies $2n$ statt n.
„ „ 61, „ 5 v. u. lies $\frac{p^{n-1}}{r^{n-1}}$ statt $\frac{p^{n-1}}{r^{n}}$.
„ „ 62, in Formel 2 lies $\cos m\varphi$ statt $\cos^{m}\varphi$.
„ „ 63, „ „ 7 „ $e^{m\varphi}$ „ $e^{m}\varphi$.
„ „ 65, „ „ 8 „ „ „ „
„ „ 68, Absatz 7 muss es heissen: *Jede Gruppe von 2 n Punkten ist selbstinvers in Bezug auf jeden der n Inversionskreise* (§ 38) *und bildet in Bezug auf einen Schnittpunkt der Inversionskreise als Centrum invers transformiert zwei regelmässige n-Ecke.*
Auf Seite 83 streiche Absatz 8 als nicht allgemein gültig (Vergl. § $67_{,5}$).

(1892. Programm No. 578.)

Auf Seite 87, Absatz 14 lies beide statt einer der.
„ „ 99, „ 6 „ § 73 „ § 71.

